Le problème qui suit est extrait de l'ancien concours pour l'ESIGETEL pour la filière MP de l'année 2000.

Il s'agit d'un sujet d'analyse, qui traite de très nombreuses parties du programme en vigueur pour les filières MP,PC,PSI.

Débutant par quelques classiques calculs trigonométriques en partie I, la partie II étudie une suite de fonctions définies par ces mêmes fonctions trigonométriques pour en établir les différents mode de convergence (cnvergence simple, uniforme et uniforme locale).
La troisième partie s'intéresse au caractère borné de la suite de fonctions et établit un développement en série d'une intégrale. Les plus anciens reconnaitront là un calcul proche de ceux que l'on peut obtenir à l'aide des séries de Fourier, aujourd'hui hors programme de mathématique. Seules les connaissances du programme d'analyse actuel sont nécessaires pour obtenir la formule. La fin de la partie est constituée d'applications, dont certaines rappelleront des développements eulériens de fonctions.
Les partie IV et V étudient diverses expressions de fonctions définies tant par des intégrales que par des séries. En reprenant une expression de la partie III, on s'intéresse enfin au développement en série entière de la fonction tangente.

Le problème traite la quasi-totalité des notions d'analyse du programme (suites et séries de fonctions, séries entières, intégrale à paramètres, suites et séries d'intégrales...). Il constitue donc un excellent entraînement pour les parties d'analyse des problèmes de concours actuels.

Bon travail à tous !

Problème

Pour tout réel $s > 1$, on note $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

On admettra pour le problème les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$$

Partie I

1. (a) Soit $t \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer la relation suivante :

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos(pt) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

(b) En déduire, pour $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $\dfrac{x-\pi}{2} + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \dfrac{\sin(px)}{p}$ sous la forme d'une intégrale.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$. Démontrer que la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)e^{int}dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel $x \in]0, 2\pi[$, la série $\sum \frac{\sin(px)}{p}$ converge et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(px)}{p}$.

Partie II :

Dans cette partie $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle strictement positive, décroissante et de limite nulle. On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions A_n, f_n et D_n définies sur $[0, 2\pi]$ par :

$$D_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx), \qquad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \beta_{k+1}) D_k(x), \qquad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin(kx)$$

4. (a) Vérifier que l'on a, pour tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) D_n(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

(b) Etablir les inégalités suivantes (avec $n > p \geqslant 1$ et $x \in [0, 2\pi]$) :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)|A_p(x)| \leqslant \beta_1 - \beta_p \qquad \sin\left(\frac{x}{2}\right)|A_n(x) - A_p(x)| \leqslant \beta_{p+1} - \beta_{n+1}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant 2\beta_{p+1}$$

5. **Question a priori hors programme**. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 2\pi]$ vers une application f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ (avec $\alpha \in]0, \pi[$). Que peut-on dire de f ?

Partie III

Dans cette partie, on considère la suite de fonction $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

6. Soit S la limite simple de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0, 2\pi]$. S est-elle continue ? continue par morceaux ?

7. (a) Soient $x \in]0,\pi[$, $p = \left\lfloor \frac{\pi}{x} \right\rfloor$. Montrer que $\left| \sum_{k=1}^{p} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leqslant \pi$.

   (b) En utilisant la partie II, montrer que pour $x \in]0,\pi[$ et $n > p$: $\left| \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leqslant 2$.

   (c) Conclure que pour tout $x \in]0,\pi[$, $|S_n(x)| \leqslant M = \pi + 2$. Expliquer pourquoi cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x.

8. Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on pose $b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt$.

   Déduire des questions précédentes que la série $\sum \frac{b_k(f)}{k}$ converge et que sa somme vérifie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k(f)}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t) dt$$

   (On précisera le théorème utilisé)

9. Applications.

   (a) En choisissant $f(t) = t$, calculer $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

   (b) On choisit $f(t) = \exp(ixt)$ où x est un réel qui n'est pas un entier relatif. Montrer que l'on obtient le développement suivant :

$$\pi \text{cotan}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

   (c) Trouver pour $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, une relation entre $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2k+1)^2 - x^2}$, $\text{cotan}(\pi x)$ et $\text{cotan}\left(\frac{\pi}{2} x\right)$.

Partie IV

10. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x pour lesquels la fonction $t \mapsto \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

11. (a) Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}$ on a :

$$\frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\text{sh}(xt) e^{-(2k+1)t}$$

   (b) Pour $x \in \mathcal{D}$ et $k \in \mathbb{N}$. Etudier l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $u_k : t \mapsto 2\text{sh}(xt)e^{-(2k+1)t}$.

   (c) Montrer (en justifiant avec précision) que pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2k+1)^2 - x^2}$$

(d) En déduire que pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)} dt = \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Partie V

12. (a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi_m(t) = \dfrac{t^m}{\mathrm{sh}(t)}$ est intégrable sur cet intervalle.

(b) Justifier l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\mathrm{sh}(t)} dt = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^m e^{-(2p+1)t} dt$$

(c) En déduire que l'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\mathrm{sh}(t)} dt = 2.m!(1 - 2^{-m-1})\zeta(m+1)$$

Dans la suite de cette partie, on reprend les notations de la partie IV.

13. Soit $x \in \mathcal{D}$. Vérifier que pour tout entier naturel p, la fonction $v_p : t \mapsto \dfrac{t^{2p+1} x^{2p+1}}{(2p+1)!\mathrm{sh}(t)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et expliciter la valeur de son intégrale en fonction de $\zeta(2p+2)$.

14. En déduire que pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)} dt = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \zeta(2p+2)(1 - 2^{-2p-2}) x^{2p+1}$$

15. (a) Conclure que tan est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et préciser les coefficients de ce développement.

(b) Comment pourrait-on déterminer les valeurs de $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)$.