Les exercices qui suivent sont extraits des oraux des concours Mines-Télécom, Mines-Ponts, Centrale et ENSEA pour les filières MP, PC et PSI. Leurs validité a été scrupuleusement vérifiée quant à leur niveau. Ils ont quelques fois étaient complétés ou modifiés pour donner une vision plus large sur le sujet traité et même accroître un peu le niveau de préparation. Ces exercices sont présentés dans l'ordre progressif des concours visés.

Le sujet traité dans ces exercices est la réduction des endomorphismes. Si les notions de base de l'algèbre linéaire sont bien sûr nécessaires pour mener à bien les résolutions, elles ne constituent pas un objectif des exercices donnés.

L'ensemble des exercices peut être abordé une fois le chapitre de réduction des endomorphismes traité en classe. Ils constituent un bon complément au TD en classe sur le sujet.

Préparer les oraux de tels concours ne s'improvise pas quelques semaines avant l'épreuve, il faut donc s'y employer le plus tôt possible dans l'année.

Bon courage à tous pour ce travail !

Exercice 1

D'après Mines-Télécom PC

1. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, on pose la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$. Montrer que B est semblable à $C = \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$.
3. On conserve les notations de la questions précédente. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 2

D'après Centrale PC : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $p \in]0,1[$. On définit l'endomorphisme u de E par :

$$\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad u(f)(x) = f(p(x-1)+1)$$

Déterminer les valeurs propres (réelles) et les vecteurs propres de u.

Exercice 3

D'après Centrale PC : Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Soit M une matrice telle que M et aM soit semblable.

1. Montrer que si λ est valeur propre de M, alors $a^k\lambda$ est aussi valeur propre de M pour tout entier k.
2. En déduire que M est nilpotente.

Exercice 4

D'après Centrale PSI : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = j$ pour $i \neq j$ et $a_{ii} = 0$.

1. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.
2. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 5

D'après Centrale MP : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit trigonalisable.
2. On suppose dans cette question que toutes les matrices B semblable à A vérifient $b_{2,1} = 0$. Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, la famille $\{x, u(x)\}$ est liée. Donner la forme de la matrice A.
3. On suppose dans cette question que toutes les matrices B semblable à A vérifient $b_{1,1} = 0$ et que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Que dire de la matrice A ?

Exercice 6

D'après ENSEA MP

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice ayant n valeurs propres distinctes. Si B est telle que $B^2 = A$, montrer que B est diagonalisable.
2. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $B^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

D'après ENSEA MP : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = \mathbf{0}$. Montrer que A n'admet aucune valeur propre réelle et que n est nécessairement pair. Trouver la trace et le déterminant de A.

Exercice 8

D'après Mines-Ponts MP : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^n$. Soit alors $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall (i,j), a_{ij} = a_i a_j$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a_1, ..., a_n)$ pour que A soit diagonalisable.

Exercice 9

D'après Mines-Ponts PC : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $D : f \mapsto f'$ défini sur E. Soit les quatre fonctions $f_1 = \text{ch}$, $f_2 = \text{sh}$, $f_3 : x \mapsto x\text{ch}(x)$ et $f_4 : x \mapsto x\text{sh}(x)$. On pose $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ et $F = \text{Vect}(B)$.

1. Montrer que B est une base de F.
2. Montrer que D induit un endomorphisme d sur F.
3. Ecrire la matrice A de d dans B.
4. Calculer A^4 et trouver un polynôme annulateur de A.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10

D'après Mines-Ponts MP : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, p un projecteur de E. On définit F sur $\mathcal{L}(E)$ par $\forall f \in \mathcal{L}(E), F(f) = f \circ p + p \circ f$.

1. Justifier que F est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer un polynôme annulateur de degré 3 de F.
2. On pose $\dim(E) = n$ et $\text{rg}(p) = r$. F est-il diagonalisable ?

Corrigé de l'exercice 1

1. On a $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. M a donc deux valeurs propres que sont 3 et -1 et on recherche les sous-espaces propres associés qui sont des droites. Les calculs mènent immédiatement à $E_3(A) = \text{Vect}(2, 1)$ puis $E_1(A) = \text{Vect}(-2, 1)$. On a donc la formule de passage :

$$M = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On peut reprendre les éléments de la question précédente, en notant que le calcul par blocs dans les matrices bénéficie des mêmes propriétés calculatoires que le calcul par coefficients. Ainsi, en posant $Q = \begin{pmatrix} 2I_n & -2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$, on a $Q^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} I_n & 2I_n \\ -I_n & 2I_n \end{pmatrix}$ et on vérifie facilement que $B = QCQ^{-1}$.

3. Supposons A diagonalisable. Alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible R telles que $A = RDR^{-1}$. La matrice C est alors semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 3D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}$ par la formule :

$$C = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$$

Puisque B est semblable à C qui est ici diagonalisable, alors B est diagonalisable.

Réciproquement, si B est diagonalisable, on sait qu'il existe un polynôme scindé à racine simple P qui annule B. Etant donné le calcul des puissances et des combinaisons linéaires de celles-ci pour des matrices semblables, on trouve alors :

$$P(B) = Q \begin{pmatrix} P(3A) & 0 \\ 0 & P(-A) \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Puisque $P(B) = 0$, il est nécessaire que $P(3A) = P(-A) = 0$, donc $P(3X)$ et $P(-X)$ sont annulateurs de A. Il reste à vérifier que ces polynômes sont bien scindés à racines simples. Pour $P(-X)$ par exemple, si l'on écrit déjà $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X - a_k)$ où les a_k sont les racines distinctes, alors on a $P(-X) = (-1)^m \displaystyle\prod_{k=1}^{m} (X + a_k)$ donc ce polynôme est encore scindé à racines simples. On conclut donc que A est diagonalisable.

Corrigé de l'exercice 2

Un vecteur propre de u vérifie $u(f) = \lambda f$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. En itérant cette relation, on obtient bien sûr $u^n(f) = \lambda^n f$. On calcule alors $u^n(f)$ d'une autre façon.