L'énoncé du problème ci-dessous est extrait du concours EPITA 2001. Il s'agit de l'épreuve commune à toutes les CPGE scientifiques.

Le problème traite de l'approximation d'une intégrale d'une fonction continue sur un segment par la méthode des rectangles. La première partie envisage le calcul explicite des approximations fournies par la méthodes des rectangles, à travers des fonctions Python. Elle se termine par la preuve que les quantités T_n convergent bien vers l'intégrale de f. La deuxième partie introduit les polynômes de Bernoulli fort utiles pour obtenir une formule d'intégration par parties successives. Cette formule permet entre autre de donner un développement asymptotique de T_n, qui précise la vitesse de convergence de T_n vers l'intégrale considérée.

L'ensemble du problème peut être traité avec les seules connaissances de Première année de CPGE, quelques soit la filière. Il balaye une large partie du programme d'Analyse et les polynômes également. Il constitue donc un excellent entraînement dès la fin de la Première année aux épreuves écrites des concours.

Bon travail à tous !

Problème

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et on pose $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Si n est dans $\mathbb{N}^*$, on note $x_k = a + \dfrac{k}{n}(b-a)$ pour $k = 0, ..., n$. On se propose dans la suite d'étudier la méthode des trapèzes qui consiste pour approcher l'intégrale I à exploiter la suite (T_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad T_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

en convenant que $T_1 = \dfrac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$.

Partie I : convergence de (T_n) vers I

1. **Expression de T_{2n} en fonction de T_n.**
   (a) Ecrire une fonction Python `Trapeze(f,a,b,n)` qui calcule la valeur numérique de T_n pour $n \geqslant 1$.
   (b) Exprimer $2T_{2n} - T_n$ en fonction de $\dfrac{b-a}{n}$ et de valeurs de la fonction f.

(c) Ecrire une fonction Python `T2(f,a,b,n)` qui calcule la valeur de $T_1, T_2, T_4, ..., T_{2^n}$. On précisera le nombre de valeurs de f à calculer par l'algorithme.

(d) Dans cette question, on prend $a = 0$, $b = 1$ et $f : x \mapsto \dfrac{4}{1+x^2}$.

i. Calculer I dans ce cas particulier.

ii. Calculer à 10^{-5} près les valeurs de T_1, T_2, T_4, T_8 et évaluer les écarts avec I pour chaque.

2. **Majoration de l'erreur commise**.

(a) On considère ici une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. Etablir que :

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}$$

(b) Si M_2 désigne un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$, montrer que :

$$|I - T_1| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12}$$

(c) En remplaçant a et b respectivement par x_k et x_{k+1} dans la question précédente et en sommant pour $k = 1, ..., n$, déterminer une majoration de $|I - T_n|$ en fonction de M_2, a, b, et n.

Partie II : développement asymptotique de T_n pour $n \to +\infty$

3. **Etude d'une suite de nombres rationnels**.

(a) Démontrer qu'il existe une unique suite (b_n) telle que $b_0 = 1$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{b_{n-p}}{p!} = 0$ pour $n \geqslant 2$.

(b) Etablir que les nombres b_n sont rationnels et expliciter b_1, b_2, b_3, b_4 sous forme irréductible.

4. **Etude des polynômes de Bernouilli**.

(a) On considère la suite de polynômes (B_n) définis par :

$$B_0 = 1 \qquad B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{b_{n-p}}{p!} X^p, \quad n \geqslant 1$$

i. Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.

ii. Montrer que $B_n' = B_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ et que $B_n(0) = B_n(1)$ pour $n \geqslant 2$.

(b) On considère la suite de polynômes (C_n) définie par :

$$C_0 = 1, \qquad C'_n = C_{n-1} \qquad C_n(0) = C_n(1)$$

i. Etablir que $C_n^{(p)} = C_{n-p}$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et en déduire que $C_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{C_{n-p}(0)}{p!} X^p$.

ii. Etablir que l'on a toujours $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{C_{n-p}(0)}{p!} = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

iii. En déduire que $C_n = B_n$ pour tout entier n.

(c) Montrer que $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ puis montrer que $b_{2p+1} = 0$ pour tout entier $p \geqslant 1$.

5. **Le développement de T_n pour $n \to +\infty$.**

(a) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^{2p+1}$ sur $[0,1]$ avec $p \geqslant 1$. Etablir la formule :

$$\int_0^1 g(t)dt = \frac{g(0)+g(1)}{2} - \sum_{j=1}^{p} b_{2j}(g^{(2j-1)}(1) - g^{(2j-1)}(0)) - \int_0^1 B_{2p+1}(t) g^{(2p+1)}(t)dt$$

(b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{2p+1}$ sur $[a,b]$. Réécrire la formule précédente en l'appliquant à $g : t \mapsto f(a + t(b-a))$.

(c) En notant M_{2p+1} de β_{2p+1} des majorants respectifs de $|f^{(2p+1)}|$ et $|B_{2p+1}|$ sur $[a,b]$, déterminer une majoration de :

$$\left| I - T_1 + \sum_{j=1}^{p} b_{2j}(b-a)^{2j}(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) \right|$$

(d) En remplaçant a et b respectivement par x_{k-1} et x_k et en sommant pour $k = 1, ..., n$, établir que :

$$T_n = I + \sum_{j=1}^{p} b_{2j} \frac{(b-a)^{2j}}{n^{2j}} (f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)) + o\left(\frac{1}{n^{2j}}\right)$$

(e) Expliciter la formule précédente pour $p = 2$.