Le problème qui suit est un ancien sujet du concours de l'ENSAI, année 2002, pour la filière MP. Il s'agit en fait de l'épreuve d'algèbre.

L'objectif du problème est l'étude du crochet d'endomorphismes et de matrices. Cette notion est particulièrement utile dans l'étude des groupes et algèbres de Lie (que l'on étudie à un niveau plus élevé).

Débutant par quelques exemples, le problème expose des cas où l'on peut trouver les valeurs propres d'endomorphismes dont on connait le crochet. La deuxième partie donne des résultats généraux sur les endomorphismes nilpotent, ainsi que sur les noyaux et images itérés. Enfin, la troisième partie propose d'étudier les propriétés générales de l'endomorphisme associé au crochet sur l'espace des matrices.

L'ensemble du problème balaye très largement les notions d'algèbre linéaire au programme de la deuxième année de CPGE. Le thème principal est la réduction des endomorphismes, mais on trouve également bien d'autres notions de l'algèbre linéaire (noyau, image, base d'espace vectoriel, nilpotence...) qui sont vues plus tôt dans le cursus.

Ce problème constitue donc un très bon entraînement pour les concours où l'algèbre linéaire et plus largement l'algèbre linéaire prennent encore une part importante des sujets. Le niveau d'un tel sujet se rapproche pour une bonne partie des énoncés actuels des épreuves du concours Mines-Ponts.

Bon travail à tous !

Problème

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 1 et E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Si a, b sont des endomorphismes de E, on notera ab l'application composée $a \circ b$. On notera également a^n l'élément $a \circ \cdots \circ a$ composé n fois. Par convention, $a^0 = \mathrm{Id}_E$.

On rappelle qu'un endomorphisme a est dit nilpotent s'il existe un entier p tel que $a^p = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(E)}$.

On appellera "crochet" de a et b l'endomorphisme $[a, b] = ab - ba$.

Pour tout endomorphisme a de E, on note l'application θ_a de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même définie par :

$$\forall b \in \mathcal{L}(E), \qquad \theta_a(b) = [a, b]$$

On admettra le résultat suivant : Si a est un endomorphisme de E, si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont les valeurs propres de a de multiplicités respectives $m_1, ..., m_p$, alors on a $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(a - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k}$.

Partie I : exemples

1. On suppose dans cette question que $E = \mathbb{C}_n[X]$ et on pose pour $P \in E$:

$$e(P) = P', \qquad f(P) = -nXP + X^2P', \qquad h(P) = -nP + 2XP'$$

   (a) Calculer $[e,h]$, $[f,h]$ et $[e,f]$.

   (b) Soit $F \neq \left\{\vec{0}\right\}$ un sous-espace de E stable par e, f et h et soit $P \neq 0$ un élément de F. En examinant les degrés des images successives de P par e et par f, prouver que $F = E$.

E désigne maintenant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie quelconque. On considère 3 éléments non nuls de $\mathcal{L}(E)$ notés e, f, h vérifiant

$$[e,h] = 2e, \qquad [f,h] = -2f, \qquad [e,f] = h$$

On note $\mathcal{L}_3$ le sous-espace qu'ils engendrent.

2. Prouver que $\dim(\mathcal{L}_3) = 3$.

3. Soit $\mathcal{J}$ un sous-espace de $\mathcal{L}_3$ tel que : $\forall (x,a) \in \mathcal{J} \times \mathcal{L}_3, \qquad [a,x] \in \mathcal{J}$.

   (a) Montrer que si $\mathcal{J}$ contient un élément sous la forme $x = \alpha e + \beta f + \gamma h$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\mathcal{J} = \mathcal{L}_3$.

   (b) Prouver que si $\mathcal{J} \neq \left\{\vec{0}\right\}$, alors on a $\mathcal{J} = \mathcal{L}_3$.

4. (a) Soit y un vecteur propre de h. Montrer que si $e(y) \neq \vec{0}$, alors $e(y)$ est vecteur propre de h.

   (b) En déduire qu'il existe x vecteur propre de h tel que $e(x) = \vec{0}$.

Dans la suite de la partie, on prend x un tel vecteur et on note α la valeur propre associée pour h.

5. (a) Calculer $h(f^k(x))$ où k est un entier naturel.

   (b) En déduire qu'il existe un entier m tel que $f^m(x) \neq \vec{0}$ et $f^{m+1}(x) = \vec{0}$.

   (c) Prouver que pour tout entier k non nul, $e(f^k(x))$ est colinéaire à $f^{k-1}(x)$.

6. On suppose que E ne contient aucun sous-espace stable par $\mathcal{L}_3$ autre que $\left\{\vec{0}\right\}$ et E. On pose alors $F = \text{Vect}\left\{x, f(x), ..., f^m(x)\right\}$

   (a) Justifier que F est stable par e, f et h. Que peut-on en déduire ?

   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{x, f(x), ..., f^m(x)\}$ est une base de E.

   (c) Déterminer la matrice de h dans $\mathcal{B}$.

   (d) En considérant la trace de h, montrer que $\alpha = -m$.

7. Déterminer la matrice de e dans la base $\mathcal{B}$.

Partie II : quelques résultats sur les endomorphismes

Dans cette partie, E désigne toujours un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

8. Prouver qu'un endomorphisme u admet une unique valeur propre si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est nilpotent.
9. Soit u et v deux endomorphismes nilpotents qui commutent. Prouver que $u - v$ est nilpotent.
10. Soit u un endomorphisme de E. On pose $\mathcal{N}_u = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathcal{G}_u = \bigcap_{p=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u^p)$.
   (a) Prouver qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{N}_u = \mathrm{Ker}(u^{p_0})$ et $\mathcal{G}_u = \mathrm{Im}(u^{p_0})$.
   (b) Prouver que $\mathcal{N}_u$ et $\mathcal{G}_u$ sont des sous-espaces de E supplémentaires, stables par u, tels que, u restreint à $\mathcal{N}_u$ est nilpotent et u restreint à $\mathcal{G}_u$ est bijectif.
   (c) Réciproquement, on suppose que $E = F \oplus G$ où F et G sont deux sous-espaces stables par u, tels que, u restreint à F soit nilpotent et u restreint à G est bijectif. Montrer que $F = \mathcal{N}_u$ et $G = \mathcal{G}_u$.

Partie III : étude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note θ_A l'endomorphisme défini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\theta_A(B) = AB - BA$.

11. (a) Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $\phi_A : M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont les valeurs propres de A.
   (b) Déterminer valeurs propres de l'endomorphisme $\psi_A : M \mapsto MA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   Pour deux valeurs propres λ, μ de A de multiplicité respective α, β, on pose

$$\mathcal{L}_{\lambda,\mu} = \left\{ UV^{\mathrm{T}}, U \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^{\alpha}, V \in \mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - \mu I_n)^{\beta} \right\}$$

12. (a) Prouver que $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ est stable par θ_A.
   (b) Prouver que la restriction de θ_A a $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ admet pour unique valeur propre $\lambda - \mu$ (on pourra utiliser que $\theta_A = \phi_A - \psi_A$).
13. (a) Soit $\mathcal{F} = \{U_1, ..., U_p\}$ et $\mathcal{G} = \{V_1, ..., V_q\}$ deux familles libres de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Prouver que la famille $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \left\{ U_i V_j^{\mathrm{T}}, i \in [\![1,p]\!], q \in [\![1,q]\!] \right\}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Soit $\mathcal{B}_\lambda$ une base $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)^{\alpha}$ et $\mathcal{B}_\mu^*$ une base $\mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}} - \mu I_n)^{\beta}$. Montrer que $\mathcal{B}_\lambda \otimes \mathcal{B}_\mu^*$ est une base de $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$.
   (c) En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda,\mu \in \sigma(A)} \mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ où $\sigma(A)$ est le spectre de A.
14. A l'aide de la partie II, déterminer $\mathcal{N}_{\theta_A}$.
15. (a) Soit $p_1, ..., p_n$ des entiers positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = n$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} p_k^2$ est minimal lorsque tous les p_k valent 1.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\dim(\mathcal{N}_A)$ soit minimal.

Corrigé du problème

Partie I : exemples

1. (a) Calculer $[e,h]$, $[f,h]$ et $[e,f]$, c'est calculer les valeurs que prennent chacun de ces endomorphismes pour tout polynôme P. On a :

$$eh(P) - he(P) = -nP' + 2XP'' + 2P' - (-nP' + 2XP'') = 2P' = 2e(P)$$

$$\begin{aligned} fh(P) - hf(P) = &- nX(-nP + 2XP') + X^2(-nP + 2XP')' \\ &- [-n(-nXP + X^2P') + 2X(-nXP + X^2P')'] \\ &= -2(-nXP + X^2P') = -2f(P) \end{aligned}$$

$$ef(P) - fe(P) = -nXP' - nP + 2XP' + X^2P'' - (-nXP' + X^2P'') = -nP + 2XP' = h(P)$$

Finalement, on a $[e,h] = 2e$, $[f,h] = -2f$ et $[e,f] = h$.

(b) Si P est un élément non nul de F de degré $k \geqslant 0$, alors $e(P)$ est de degré $k-1$, $f(P)$ est de degré $k+1$ (sauf pour $n = k$, où le degré est conservé à n). Puisque F est stable par e et f, alors F contient au moins trois polynômes de degré respectifs $k-1$, k et $k+1$.

En réitérant le procédé, on va pouvoir trouver une famille de polynôme échelonnés en degré de 0 à n qui constituera une base de E. Ainsi, on a $E \subset F$ et donc $F = E$.

2. Par définition, la famille $\{e, f, h\}$ est une famille génératrice de $\mathcal{L}_3$. On peut prouver qu'elle est libre. Soit α, β, γ des complexes tels que $\alpha e + \beta f + \gamma h = 0$. On montre que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. De l'égalité $\alpha e + \beta f + \gamma h = 0$, on prend le crochet avec successivement e, f, h. On obtient alors les trois relations

$$-\alpha h - 2\gamma e = 0 \qquad \alpha h + 2\gamma f = 0 \qquad 2\alpha e - 2\beta f = 0$$

Enfin, en reprenant les crochets par e, f, h et en considérant que ces trois éléments sont tous non nuls, il vient $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

En somme, la famille $\{e, f, h\}$ est une base de $\mathcal{L}_3$ et donc $\dim(\mathcal{L}_3) = 3$.

3. (a) Pour avoir l'égalité $\mathcal{J} = \mathcal{L}_3$, il suffit de montrer que h est dans $\mathcal{J}$ par la question précédente. En fait, si on prend l'élément de $\mathcal{J}$ sous la forme donnée et en lui appliquant les crochets par les éléments e, f, h, on doit trouver des éléments $\gamma_1 e$, $\gamma_2 f$ et $\gamma_3 h$ avec des γ_i dépendant de γ tous non nuls.

Mais par hypothèse, tous ces éléments sont encore dans $\mathcal{J}$ et donc e, f, h sont dans $\mathcal{J}$ comme tous les γ_i sont non nuls. Finalement, on a bien $\mathcal{J} = \mathcal{L}_3$.