FONCTIONS DE VARIABLE REELLE

Exercices d'oraux

Les exercices qui suivent sont extraits de sujets d'oraux rapportés par les candidats des concours Centrale-Supélec et Mines-Ponts des filières MP, PC et PSI. Ils ont été scrupuleusement vérifiés ou même légèrement modifiés pour être totalement corrects.

Le sujet traité ici est l'étude générale des fonctions d'une variable réelle. Il s'agit d'exercice sur les fonctions continues, dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$ et même sur l'intégration de base sur un segment.

Ce thème, essentiellement traité en première année de classe préparatoire, est souvent oublié des candidats pour qui le programme de deuxième année prend le pas. Il est donc bon de se replonger dans ces notions qui prennent leur place à l'oral des divers concours. De plus, les étudiants de première année peuvent traiter la quasi totalité des exercices pour prendre du recul s'ils sont très motivés.

Bon courage à tous pour vos révisions !

Exercice 1

D'après Centrale MP : Soit $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{\int_x^{+\infty} f(t)dt}$.

1. Etudier le domaine $\mathcal{D}_g$ de définition de g et montrer que sur ce domaine g vérifie l'équation différentielle on a $y' = y(y - x)$.
2. Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}_g$ on a $g(x) > x$.

Exercice 2

D'après Mines-Ponts PSI : Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g$ soit décroissante. Montrer que les fonction $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent chacune un unique point fixe (*on rappelle qu'un point fixe d'une fonction h est un réel x tel que $h(x) = x$*).

Exercice 3

D'après Centrale PSI : Pour f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles, on pose

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt \qquad g : x \mapsto f(x) + F(x)$$

1. On suppose que f admet une limite réelle en $+\infty$. Déterminer quand F admet une limite réelle en $+\infty$.
2. On suppose que F admet une limite réelle en $+\infty$. f admet-elle une limite en $+\infty$?
3. On suppose que g admet une limite réelle en $+\infty$. Montrer que f admet une limite réelle que l'on déterminera.

Exercice 4

D'après Centrale PSI : On écrit le développement décimal illimité de tout réel de $]0,1[$ sous la forme $x = 0, a_1, a_2a_3a_4\ldots$. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, et pour x de $]0,1[$ écrit comme précédemment $f(x) = 0, a_2a_1a_3a_4\ldots$.

1. La fonction f est-elle continue su $[0,1]$?
2. La fonction f est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$?
3. Donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ en utilisant des encadrements de $\lfloor 100x \rfloor$ pour $x \in]0,1[$.

Exercice 5

D'après Mines-Ponts PC : Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$, $f(1) = \ln(2)$ et pour tout x de $]0,1[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Exercice 6

D'après Mines-Ponts MP : Soit $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)} - \dfrac{x}{\sin(x)}$ pour $x \in [0,\pi[$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi[$ et calculer $f'(0)$.
2. f est elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,\pi[$? Calculer $f''(0)$.

Exercice 7

D'après Mines-Ponts PC : Trouver les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt + 1$$

Exercice 8

D'après Mines-Ponts MP.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et a, b, c trois éléments distincts de I. Montrer qu'il existe d dans I tel que

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-b)(c-a)} = \frac{1}{2}f''(d)$$

   Envisager une généralisation à plus de trois points d'un intervalle.

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un segment $[a,b]$ telle que $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ dans $[a,b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 9

D'après Mines-Ponts MP. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe a, b réels positifs tels que pour tout x réel positif on ait $|f(x)| \leqslant ax + b$.

Exercice 10

D'après Polytechnique MP. Pour tout $t \geqslant 0$, on considère l'équation $xe^x = t$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution et que cette solution dépend continûment de t.
2. Déterminer un équivalent puis un développement asymptotique de la solution pour $t \to +\infty$.

Corrigé de l'exercice 1

1. La fonction f est intégrable en $+\infty$ car on y trouve la comparaison $f(x) = o(e^{-x})$ par exemple. Donc $\int_x^{+\infty} f(t)dt$ existe. De plus, comme f est strictement positive, on a $\int_x^{+\infty} f(t)dt > 0$ pour tout x. Au final, g est bien définie sur $\mathbb{R} = \mathcal{D}_g$.

   On pose pour la suite $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$, qui est dérivable avec $F' = -f$. On a donc :
$$g'(x) = \frac{f'(x)F(x) - f(x)F'(x)}{F(x)^2} = -x\frac{f}{F} + \frac{f(x)^2}{F(x)^2} = g(x)^2 - xg(x)$$
   Donc g est bien solution de l'équation différentielle $y' = y(y - x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Puisque $F(x) > 0$, on a $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - xF(x) > 0$. Pour obtenir cette dernière inégalité, on étudie la fonction auxiliaire définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - xR(x)$. φ est dérivable avec
$$\varphi'(x) = -xf(x) + xf(x) - F(x) = -F(x) < 0$$
   φ est donc strictement décroissante. Si sa limite en $+\infty$ est non négative, cela assurera sa positivité. En effet, on a clairement $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et pour $xF(x)$, on note par croissance de l'intégrale que :
$$F(x) \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-x}$$
   On a donc $xF(x) \leqslant xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 \geqslant 0$ et donc $\varphi(x) > 0$ pour tout x réel ce qui garantit $g(x) > x$.

Corrigé de l'exercice 2

Rechercher un point fixe à une fonction h, c'est résoudre l'équation $h(x) - x = 0$.

Dans notre cas, la fonction $x \mapsto f \circ g(x) - x$ est strictement décroissante car $f \circ g$ est supposée décroissante.

De plus, puisque $f \circ g$ est décroissante, le théorème de la limite monotone assure l'existence de limite en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Ainsi, par règles opératoires sur les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f \circ g(x) - x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f \circ g(x) - x = -\infty$.

Puisque $f \circ g$ est continue comme f et g le sont, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une solution à l'équation $f \circ g(x) - x = 0$ et c'est un point fixe que l'on note x_0 pour la suite. La stricte décroissance de la fonction étudiée assure l'unicité de la solution. En somme, la fonction $x \mapsto f \circ g(x) - x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans lui-même (théorème de la bijection continue).

Utilisant le point fixe de $f \circ g$ vérifiant donc $f \circ g(x_0) = x_0$, une composition par g donne $g \circ f(g(x)) = g(x)$ ce qui assure que $y = g(x_0)$ est un point fixe de $g \circ f$ et donc on a l'existence d'un tel point fixe.

D'un autre côté, si y est un point fixe de cette fonction $g \circ f$, il vérifie $g \circ f(y) = y$ et en composant par f on obtient $f \circ g(f(y)) = f(y)$ et par unicité du point fixe de $f \circ g$ on a $f(y) = x_0$. Enfin, on a $y = g \circ f(y) = g(x_0)$. On a ainsi l'unicité de y, qui ne peut valoir que $g(x_0)$.

Corrigé de l'exercice 3

1. Si f admet une limite réelle l en $+\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A > 0$ tel que pour $x > A$ on ait $f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon]$. Pour $x > A$, on a alors :

$$F(a) + (x - a)\,(l \pm \varepsilon) \leqslant F(x) = F(A) + \int_A^x f(t)dt \leqslant F(a) + (x - a)\,(l \mp \varepsilon)$$

   Si on a $l \neq 0$, par exemple $l > 0$, avec $\varepsilon = \frac{l}{2}$ on trouve que :

$$F(x) \geqslant F(A) + \frac{l}{2}(x - A) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   Pour $l < 0$, le même raisonnement mène à une limite de $-\infty$ pour F. Il est donc nécessaire que $l = 0$ et qu'en plus f soit intégrable en $+\infty$ pour que F admette une limite en $+\infty$.

2. Il n'est pas obligatoire que f admette une limite en $+\infty$. En effet, on donne une contre exemple. Soit f la fonction telle que $f(x) = 0$ pour $x \notin \mathbb{N}$ et $f(x) = 1$ pour $x \in \mathbb{N}$. f n'admet clairement pas de limite pour $x \to +\infty$ mais F qui est identiquement nulle dans ce cas en admet une (0).

3. Si f admet une limite, puisque g en admet une également, on aura que $F = g - f$ admet une limite en $+\infty$. Par la première question, il est donc nécessaire que la limite de f soit nulle. Si l est la limite de g, on doit nécessairement avoir que la limite de F est l aussi. Mais on a $g = F' + F$. On démontrer alors la fait suivant, qui est assez général :

$$\lim_{x \to +\infty} F'(x) + F(x) = l \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} F(x) = l$$

   Pour cela, on se donne $\varepsilon > 0$. Alors il existe $A > 0$ tel que pour tout $t > A$ on ait :

$$l - \varepsilon \leqslant F'(t) + F(t) \leqslant l + \varepsilon$$

   Multipliant par e^t et intégrant les inégalités sur $[A, x]$, on a donc :

$$(l - \varepsilon)(e^x - e^A) \leqslant F(x)e^x - F(A)e^A \leqslant (l + \varepsilon)(e^x - e^A)$$

   On encadre alors $F(x)$ par la double inégalité :

$$(l - \varepsilon) - (l - \varepsilon + F(A))e^{A-x} \leqslant F(x) \leqslant l + \varepsilon - (l + \varepsilon + F(A))e^{A-x}$$