ESPACES EUCLIDIENS ET PREHILBERTIENS

Exercices d'oraux

Les exercices qui suivent sont extraits des oraux des concours Mines-Ponts et Centrale des filières MP, PC et PSI. Leur validité en terme de niveau a été scrupuleusement vérifiée. Les énoncés ont pu être légèrement modifiés pour en augmenter un peu la difficulté ou pour donner une vision plus large au sujet traité.

Le thème abordé par les exercices ci-après est celui des espaces euclidiens (produit scalaire, bases et sous-espaces orthogonaux, projection et distance) comme les endomorphismes remarquables de tels espaces, à savoir les endomorphismes orthogonaux et symétriques.

Ces exercices peuvent être traités directement après avoir vu en classe l'ensemble des notions sur le sujet. Ils sont un bon approfondissement de TD.

Préparer les oraux de tels concours ne s'improvise pas quelques semaines avant l'épreuve. Il faut donc commencer la résolution de ces exercices le plus tôt possible dans l'année.

Bon courage à tous pour ce travail !

Exercice 1

D'après Mines-Télécom MP : Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = n$.
2. Montrer que $n \leqslant \displaystyle\sum_{i,j}^{n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}$. Etudier les cas d'égalité.
3. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n$. Etudier les cas d'égalité.

Exercice 2

D'après Centrale MP

1. Déterminer toutes les matrices de $O_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel type d'endomorphisme représentent ces matrices ?
2. Montrer que toute matrice de $O_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3

D'après Centrale PC : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^m = I_n$.

1. Montrer que $A^2 = I_n$.
2. Quel type d'endomorphisme est représenté par A ?

Exercice 4

D'après Mines-Ponts PSI : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et soir $B = A + A^{\mathrm{T}}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(A^{\mathrm{T}})$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}}) \subset \mathrm{Ker}(A)^{\perp}$ puis que $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(A^{\mathrm{T}})$.

Exercice 5

D'après Mines-Ponts MP : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques, calculer s'il existe :

$$\min_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - m_{ij})^2$$

Exercice 6

D'après Centrale MP : On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques aux valeurs propres strictement positives (dites définies positives).

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

Exercice 7

D'après Mines-Ponts MP : Soit E un espace de dimension n, v un endomorphisme de E.

1. Montrer que la quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (v(e_i)|e_i))$ où $(e_i$ est une base orthonormale ne dépend pas de la base orthonormale choisie.
2. Montrer que la quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (v(e_i)|f_j)^2$ ne dépend pas des bases orthonormées (e_i) et (f_j). Calculer cette quantité pour un projecteur orthogonal.

Exercice 8

D'après Mines-Ponts PSI, ***cet exercice nécessite d'avoir traité les fonctions de plusieurs variables*** : Soit A une matrice symétrique d'ordre n à valeurs propres strictement positives. Soit également B un vecteur colonne d'ordre n quelconque. On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(X) = X^{\mathrm{T}} A X - 2B^{\mathrm{T}} X$$

1. Calculer le gradient de f en tout X de $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer (s'il existe) le minimum de f.

Exercice 9

D'après Mines-Ponts MP : Soit E un espace euclidien et $u \in O(E)$.

1. On suppose que $(u - \mathrm{Id}_E)^2 = 0$. Comparer $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u^{-1} - \mathrm{Id}_E)$. En déduire que $u = \mathrm{Id}_E$.
2. Reprendre le résultat précédent lorsque $(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^2 = 0$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 10

D'après Mines-Ponts MP : Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ les ensembles des matrices symétriques et symétriques positives. On définit sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la relation $\preceq$ d'ordre suivante par :

$$\forall A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \qquad A \preceq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

1. Montrer que $0 \preceq A$ si et seulement si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $(X|AX) \geqslant 0$.
2. Vérifier que $\preceq$ est bien d'une relation d'ordre.
3. En déduire que toute suite croissante et majorée (au sens de $\preceq$)dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ converge.

Corrigé de l'exercice 1

1. Si une matrice A est orthogonale, c'est en particulier que ses colonnes (C_j) forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ soit que pour tout j on a $\|C_j\|^2 = 1$ donc que $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$. On en déduit par double sommation :

$$\sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$$

2. Reprenons le même raisonnement mais avec les somme de valeurs absolues. On a e fait :

$$n = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$$

En effet, le carré du second membre vaut $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 + \sum_{i \neq k, j \neq l} |a_{ij}| \, |a_{kl}| \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$.

On a l'égalité si et seulement si la somme $\sum_{i \neq k, j \neq l} |a_{ij}| \, |a_{kl}|$ est nulle, ce qui signifie en fait qu'un seul coefficient sur chaque colonne et chaque ligne et non nul et vaut automatiquement 1. De telles matrices réalisant l'égalité sont appelées matrices de *permutation*.

Pour la deuxième inégalité, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux sommes :

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \times 1 \leqslant \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} 1} = n\sqrt{n}$$

Il y a égalité des deux membres si et seulement s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir si les matrices $(|a_{ij}|)_{i,j}$ et $(1)_{i,j}$ sont proportionnelles soit $|a_{ij}| = \lambda$. Mais la contrainte d'orthogonalité de la matrice donne alors $a_{ij} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$. Il faut alors pouvoir "distribuer" les signes pour garantir l'orthogonalité des colonnes entre elle.

C'est par exemple possible à l'ordre $n = 2$ avec $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ mais impossible pour $n = 3$. De façon générale, c'est possible pour n pair mais pas pour n impair.

3. Notons ici $U = (1, 1, ..., 1)^{\mathrm{T}}$ le vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1. Il faut alors remarquer que :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = (U|AU)$$

Encore par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\right| = |(U|AU)| \leqslant \|U\|\,\|AU\|$$

Dans la mesure où A est orthogonale, on a $\|AU\| = \|U\| = \sqrt{n}$, d'où l'inégalité voulue.

Le cas d'égalité est réalisé lorsque l'on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir que AU et U soient colinéaires. Comme A est orthogonale, on ne peut avoir que $AU = \pm U$, soit en fait $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ pour tout j ou alors $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = -1$ pour tout j. De telles matrices s'apparentent aux matrices dites *stochastiques*.

Corrigé de l'exercice 2

1. Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, ses seules valeurs propres réelles potentielles sont 1 ou -1. Si A est diagonalisable, alors elle est semblable à une matrice $\mathrm{Diag}(1, ..., 1, -1, ..., -1)$. De plus, A représente alors une symétrie vectorielle et c'est même une symétrie orthogonale.

   Pour voir ce dernier fait, on montre que $E_1(A) = \mathrm{Inv}(A)$ et $E_{-1}(A) = \mathrm{Opp}(A)$ sont orthogonaux entre eux. Si $x \in E_1(A)$ et $y \in E_{-1}(A)$, alors on a :

$$(x|y) = (u(x)|y) = (x|u^{-1}(y)) = -(x|y) \Longrightarrow (x|y) = 0$$

   Réciproquement, toute matrice de symétrie orthogonale est bien orthogonale est diagonalisable et ce sont les seules.

2. On prouve dans un premier temps que toute matrice orthogonale est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont de l'une des formes suivantes :

$$(1) \qquad (-1) \qquad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   On procède par récurrence forte sur la dimension n. C'est évident pour $n = 1$. On se donne à présent un espace de dimension $n+1$ et on distingue les cas. Si A admet une valeur propre réelle, c'est 1 ou -1 et il y a une droite stable par A et son orthogonal est aussi stable par A et on applique l'hypothèse de récurrence à l'orthogonal qui est de dimension n.
   S'il n'y a pas de valeur propre réelle, on en prend une complexe λ et un vecteur propre Z associé. On a les relations $AZ = \lambda Z$ mais aussi $A\overline{Z} = \overline{\lambda Z}$ et donc $(AZ)^{\mathrm{T}}(A\overline{Z}) = |\lambda|^2 Z^{\mathrm{T}}\overline{Z}$. Mais puisque $A^{\mathrm{T}}A = I_n$, et que $Z \neq \vec{0}$, on en tire que $|\lambda| = 1$.
   On note alors $\lambda = e^{i\theta}$ et $X = \Re(Z)$ puis $Y = \Im Z$. La relation $AZ = \lambda Z$ donne par identification des parties réelle et imaginaire les deux relations $AX = \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y$ et $AX = \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y$.
   Ainsi, le plan $P = \mathrm{Vect}(X, Y)$ est stable par l'endomorphisme représenté par A et A