



Enoncés

- 1) a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\operatorname{Arg} e^{\frac{\alpha + i\beta}{\theta}}$ et $\operatorname{Arg} e^{\frac{\alpha - i\beta}{\theta}}$.
- b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\operatorname{Arg} e^{\frac{\alpha + i\beta}{\theta}}$ et $\operatorname{Arg} e^{\frac{\alpha - i\beta}{\theta}}$.
- 2) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b avec $\operatorname{Arg}(b) > 0$ tel que $b^2 = a$.
- 3) Soit x un nombre réel. Déterminer l'expression de $\cos^4 x$ et de $\sin^4 x$ en fonction des $(\cos(kx))_{1 \leq k \leq 4}$.
- 4) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, une autre expression de $S_n(x)$.
- 5) Soit n un entier naturel. Déterminer l'ensemble des réels x solutions du système :
- $$\begin{cases} \cos x = \cos(nx) \\ \sin x = \sin(nx) \end{cases}$$

Correction

1) a) ■ On a :

$$\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}} \left(e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} \right)}{e^{\frac{i\beta}{2}} \left(e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}} \right)}$$

donc, d'après les formules d'Euler :

$$= \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\beta}{2}}} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

et donc :

$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} e^{\frac{i(\alpha-\beta)}{2}} \textcircled{1}$$

On peut alors écrire :

$$\hat{A}_e \frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

soit encore d'après les formules trigonométriques

usuelles :

$$= \frac{\sin\frac{2\alpha - \beta}{2} + \sin\frac{\alpha\beta}{2}}{2 \sin\frac{\beta}{2}}$$

soit finalement :

$$\hat{A}_e \frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{\sin\frac{2\alpha - \beta}{2}}{2 \sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2}$$