



## Enoncés

- 1) a) Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Déterminer  $\operatorname{Arg} e^{\frac{\alpha + i\beta}{\theta}}$  et  $\operatorname{Arg} e^{\frac{\alpha - i\beta}{\theta}}$ .
- b) Soient  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Déterminer  $\operatorname{Arg} e^{\frac{\alpha + i\beta}{\theta}}$  et  $\operatorname{Arg} e^{\frac{\alpha - i\beta}{\theta}}$ .
- 2) Soit  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ . Montrer qu'il existe un unique nombre complexe  $b$  avec  $\operatorname{Arg}(b) > 0$  tel que  $b^2 = a$ .
- 3) Soit  $x$  un nombre réel. Déterminer l'expression de  $\cos^4 x$  et de  $\sin^4 x$  en fonction des  $(\cos(kx))_{1 \leq k \leq 4}$ .
- 4) On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ . Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , une autre expression de  $S_n(x)$ .
- 5) Soit  $n$  un entier naturel. Déterminer l'ensemble des réels  $x$  solutions du système :
- $$\begin{cases} \cos x = \cos(nx) \\ \sin x = \sin(nx) \end{cases}$$

## Correction

1) a) ■ On a :

$$\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\beta}{2}}} \times \frac{e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}}{e^{-\frac{i\beta}{2}} - e^{\frac{i\beta}{2}}}$$

donc, d'après les formules d'Euler :

$$= \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\beta}{2}}} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

et donc :

$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} e^{\frac{i(\alpha-\beta)}{2}} \textcircled{1}.$$

On peut alors écrire :

$$\hat{A}_e \frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

soit encore d'après les formules trigonométriques

usuelles :

$$= \frac{\sin\frac{2\alpha - \beta}{2} + \sin\frac{\alpha\beta}{2}}{2 \sin\frac{\beta}{2}}$$

soit finalement :

$$\hat{A}_e \frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{\sin\frac{2\alpha - \beta}{2}}{2 \sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2}$$