Enoncés

1) a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\Re e\left(\dfrac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right)$ et $\Im m\left(\dfrac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right)$.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\Re e\left(\dfrac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right)$ et $\Im m\left(\dfrac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right)$.

2) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b avec $\Re e(b)>0$ tel que $b^2=a$.

3) Soit x un nombre réel. Déterminer l'expression de $\cos^4 x$ et de $\sin^4 x$ en fonction des $(\cos(kx))_{1 \le k \le 4}$.

4) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, une autre expression de $S_n(x)$.

5) Soit n un entier naturel. Déterminer l'ensemble des réels x solutions du système : $\begin{cases} \cos x = \cos(nx) \\ -\sin x = \sin(nx) \end{cases}$.

Correction

1) a) ■ On a :

$$\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}} = \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\beta}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{-i\frac{\beta}{2}} - e^{i\frac{\beta}{2}}}$$

donc, d'après les formules d'Euler :

$$= \frac{e^{i\frac{a}{2}}}{e^{i\frac{b}{2}}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

et donc :

$$= \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\frac{a-b}{2}} \text{ ①.}$$

On peut alors écrire :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

soit encore d'après les formules trigonométriques usuelles :

$$= \frac{\sin\left(\frac{2\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

soit finalement :

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2}}$$