Exercices d'oraux

Les exercices qui suivent sont extraits d'oraux pour les concours Centrale et Mines-Ponts des filières MP, PC et PSI. Il s'agit d'exercices rapportés par les candidats, dont l'exactitude et l'authenticité ont été vérifiées.

Tous les exercices portent sur le sujet de l'intégration. Ils ont été disposés dans une progression logique des connaissances à acquérir sur le sujets : intégration sur un segment, intégrales convergentes sur un intervalle quelconque, intégrabilité puis suites et séries de fonctions intégrables pour terminer sur les intégrales à paramètres réels (continuité, classe $\mathcal{C}^k$).

Bien sûr, certains exercices peuvent toucher d'autres parties du programme d'analyse de la classe (équations différentielles, séries entières...).

L'intérêt d'une telle fiche d'exercices est qu'ils peuvent être globalement traités directement après le chapitre en question, et donc bien avant la période de révision des oraux.

Il est bon d'anticiper le niveau des concours pour ne pas être pris au dépourvu. Aussi, il est bon d'étudier ces exercices le plus tôt possible dans l'année. En effet, le chapitre des séries numériques est souvent traité au début de l'année.

Bon courage pour vos révisions !

Exercice 1

D'après Mines-Ponts MP

1. Montrer que pour tout a réel et $a \in \mathbb{N}^*$ on a $a^{2n}-1 = (a^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(a^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$.
2. Soit alors $I(a) = \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(t)+1)dt$.
   Montrer que pour tout $a \in]-1,1[$, on a $I(a) = 0$ et $I(a) = 2\pi \ln|a|$ sinon.

Exercice 2

D'après Mines-Ponts PC : Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$i)\ \ f(1)=0 \qquad ii)\ \ f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ avec } f'(1) \neq 0$$

$$iii)\ \ \forall x>0, (x-1)f(x)>0 \qquad iv)\ \ \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{f(x)} = 0$$

Lorsque cela est défini, on pose $G(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{f(t)}$.

1. Montrer que G est bien définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

2. Montrer que G est prolongeable par continuité en 1 en posant $G(1) = \dfrac{\ln(2)}{f'(1)}$.
3. Montrer que G est prolongeable par continuité en 0.
4. Montrer que G est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Calculer G'.

Exercice 3

D'après Mines-Ponts MP : Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$. On suppose qu'il existe $s_0 \geqslant 0$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}dt$ soit convergente. Montrer que pour tout $s \geqslant s_0$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ est convergente.

Exercice 4

D'après Centrale PSI : On pose pour tout $x > 0$: $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. Déterminer f'.
2. Montrer que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.
3. Montrer que $f(x) = \underset{x\infty}{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
4. Montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 5

D'après Mines-Ponts PSI : Soit a et b deux réels strictement positifs différents.

1. Montrer l'existence et calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(at)-\cos(bt)}{t}dt$ (*On pourra étudier l'intégrale sur* $[\varepsilon,+\infty[$, $\varepsilon > 0$.)
2. Même question pour $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)\sin(bt)}{t}dt$.

Exercice 6

D'après Mines-Ponts MP : Soit a et b des réels strictement positifs.

1. Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Exercice 7

D'après Mines-Ponts PC : On définit pour $x \in]0, +\infty[$: $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à déterminer.
3. Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 8

D'après Centrale PSI : Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x\cos(t))}{\cos(t)} dt$.

1. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et calculer $I'(x)$ par le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.
2. Montrer que I est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

Exercice 9

D'après Centrale PSI : Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \dfrac{dt}{x + \sin^2(t)}$

1. Montrer que f est bien définie et étudier ses variations sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer ses limites aux bornes.
3. Avec le changement de variable $u = \tan(t)$, déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 10

D'après Mines-Ponts MP : On pose lorsque cela est défini $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que l'on a pour tout x non nul : $xf'(x) - f(x) + 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$.

Corrigé de l'exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on factorise dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^{2n}-1$. Ses racines sont les racines $2n$-ième de l'unité. Deux sont réelles (1 et -1) et les autres sont les $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ pour $k \neq 0, k \neq n$ et $k \in [\![1, 2n-1]\!]$. On en déduit immédiatement la factorisation en irréductible de $\mathbb{C}[X]$.

   Pour la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on utilisa la formule :

   $$(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$$

   On rappelle également que $e^{\frac{ik\pi}{n}}$ et $e^{\frac{i(2n-k)\pi}{n}}$ sont conjuguées pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. La formule annoncée est donc immédiate en évaluant en a.

2. On note déjà que pour tout a réel, la fonction $t \mapsto a^2 - 2a\cos(t) + 1$ ne s'annule pas et elle est positive (en considérant le trinôme du second degré en a). Ainsi, on intègre une fonction continue sur $[0, \pi]$, il s'agit d'une intégrale classique.

   On peut passer par les sommes de Riemann. L'intégrale demandée est la limite pour $n \to +\infty$ des sommes :

   $$S_n = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(a^2 - 2a\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right)$$

   On peut utiliser la factorisation de la première question pour avoir pour $a \neq \pm 1$:

   $$S_n = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(a^{2n}-1)(a^2-2a+1)}{a^2-1}\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{(a^{2n}-1)(a-1)}{a+1}\right)$$

   On distingue les cas :

   - Pour $a \in]-1, 1[$, on a pour $n \to +\infty$:

     $$S_n \sim \frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{1-a}{1+a}\right) \longrightarrow 0$$

   - Pour $|a| > 1$, on a :

     $$S_n \sim \frac{\pi}{n}\ln(|a|^{2n}) = 2\pi\ln|a|$$

   Enfin, la fonction $a \mapsto I(a)$ est clairement continue par continuité sous le signe intégrale (la domination est très simple puisque l'on peut majorer sur un segment en a). La formule données est aussi valable en $a = 1$ et $a = -1$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Lorsque $x \in]0,1[$ (resp. $x \in]1,+\infty[$), alors $x^2 \in]0,1[$ (resp. $x^2 \in]1,+\infty[$). Selon iii), f ne s'annule pas sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et $\frac{1}{f}$ est continue sur ces deux intervalles. $G(x)$ existe donc bien comme l'intégrale d'une fonction continue sur le segment $[x,x^2]$ (ou $[x^2,x]$).

2. Il faut et il suffit que G admette une limite finie donnée par l'énoncé. Puisque f est dérivable, on peut écrire un développement limité à l'ordre 1 de f avec $f(1)=0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x/|x-1| \leqslant \eta, \qquad |f(x) - f'(1)(x-1)| \leqslant \varepsilon|x-1|$$
En intégrant les comparaison pour $|x-1| \leqslant \eta$, on trouve si $f'(1) > 0$:
$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{(f'(1)-\varepsilon)|t-1|} \leqslant G(x) \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{(f'(1)+\varepsilon)|t-1|}$$
Il suffit alors d'intégrer $\dfrac{1}{|t-1|}$ pour avoir :
$$\frac{\ln(2)}{f'(1)+\varepsilon} \leqslant G(x) \leqslant \frac{\ln(2)}{f'(1)-\varepsilon}$$
ε étant arbitraire, on trouve bien que $G(x)$ admet une limite qui est celle donnée par l'énoncé. On laisse le soin à chacun de changer les inégalités dans le cas où $f'(1) < 0$.

3. On exploite ici la condition iv). Elle dit que $\dfrac{1}{f(t)} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et la dernière fonction est intégrable en 0. Comme à la question précédente, on se donne $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que :
$$\forall x/|x| < \eta, \qquad \left|\frac{1}{f(t)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}$$
On peut noter par iii) que f est négative sur $]0,1[$. On intègre alors pour avoir :
$$|G(x)| \leqslant \varepsilon \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \varepsilon(\sqrt{x}-x) \leqslant \varepsilon$$
On sait donc que $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = 0$ ce qui assure que G est prolongeable par continuité en 0 en posant $G(0)=0$.

4. Si F désigne une primitive de $\dfrac{1}{f}$ sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$, on a :
$$G(x) = F\left(x^2\right) - F(x)$$
On sait donc que G est dérivable avec $G'(x) = \dfrac{2x}{f(x^2)} - \dfrac{1}{f(x)}$

Corrigé de l'exercice 3

Il ne s'agit pas ici d'absolue convergence de l'intégrale mais seulement de sa convergence. Il faut montrer que l'intégrale $\int_0^A f(t)e^{-st}dt$ admet une limite pour $A \to +\infty$. On sait l'existence d'une limite finie à $F(X) = \int_0^X f(t)e^{-st}dt$. On se donne $s > s_0$ et on va alors procéder à une intégration par partie :

$$\int_0^A f(t)e^{-st}dt = \int_0^A f(t)e^{-s_0t}e^{-(s-s_0)t}dt = \int_0^A F'(t)e^{-(s-s_0)t}dt$$
$$= \left[F(t)e^{-(s-s_0)t}\right]_{t=0}^{t=A} + (s-s_0)\int_0^A F(t)e^{-(s-s_0)t}dt$$

Puisque la fonction F admet une limite en $+\infty$, alors elle est bornée sur un voisinage de $+\infty$ et en fait sur $[0, +\infty[$. De ce fait, l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-(s-s_0)t}dt$ est absolument convergente par comparaison aux intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}dt$ avec $\beta = s - s_0 > 0$. Enfin, le terme entre crochets admet lui aussi une limite (qui est 0 d'ailleurs).

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$ est bien convergente.

Corrigé de l'exercice 4

1. Soit $x > 0$. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et on a $|g(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Par comparaison, l'intégrale $\int_x^{+\infty} g(t)dt$ est absolument convergente donc convergente. Ceci garantit l'existence de $f(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

   Pour voir que f est dérivable, écrivons par exemple :

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$$

   Il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue de la borne inférieure sur un segment pour le premier terme. f est donc dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x^2}$.

2. Reprenons l'écriture précédente de $f(x)$ et notons que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'inégalité $|\sin(t) - t| \leqslant \dfrac{|t|^3}{6}$ (par l'inégalité de Taylor-Lagrange entre autre). Ainsi, on a pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\int_x^1 \frac{dt}{t} - \int_x^1 \frac{t^2}{6}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt \leqslant f(x) \leqslant \int_x^1 \frac{dt}{t} + \int_x^1 \frac{t^2}{6}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$$