Les exercices qui suivent sont extraits d'oraux pour les concours Centrale et Mines-Ponts des filières MP, PC et PSI. Il s'agit d'exercices rapportés par les candidats, dont l'exactitude et l'authenticité ont été vérifiées.

Tous les exercices portent sur le sujet des séries entières, sujet très largement diffusé dans les problèmes d'écrits et les exercices d'oraux. Certains exercices peuvent toucher d'autres parties du programme (intégration terme à terme souvent, équations différentielles ou fonctionnelles également).

L'intérêt d'une telle fiche d'exercices et qu'ils peuvent être traités (à quelques questions) directement après le chapitre en question, et donc bien avant la période de révision des oraux.

Il est bon d'anticiper le niveau des concours pour ne pas être pris au dépourvu. Aussi, il est bon d'étudier ces exercices le plus tôt possible dans l'année. En effet, le chapitre des séries numériques est souvent traité au début de l'année.

Bon courage pour vos révisions !

Exercice 1

D'après Centrale PC : Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière :

$$\sum_{n \geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$$

Exercice 2

D'après Centrale PC : Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière :

$$\sum_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) x^n$$

Exercice 3

D'après Mines-Ponts MP : Soit R (resp. R') le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ (resp. $\sum_{n \geqslant 0} \sin(a_n) x^n$). Montrer que $R \leqslant R'$.

Exercice 4

D'après Mines-Ponts PSI : Soit (a_n) une suite de complexe tous non nuls. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et R' celui de la série entière $\sum \frac{1}{a_n} z^n$

1. Montrer que $RR' \in [0,1]$ avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$.
2. Donner un exemple où $RR' \in]0,1[$

Exercice 5

D'après Mines-Ponts MP : Pour tout $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on pose $f(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière qui définit $f(x,t)$.
2. Etudier la convergence de la série entière en $x = \pm R$.
3. Calculer $f(x,t)$ dès que cela est défini.

Exercice 6

D'après Centrale MP : Soit (a_n) une suite telle que $\sum |a_n|$ converge.

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ est bien définie et continue.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x) e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 7

D'après Centrale MP : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Montrer l'équivalence $R > 0 \iff \exists q > 0 / \, |a_n| \leqslant q^n$.
2. Pour $R > 0$, on pose $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que pour tout $r < R$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

3. On suppose que $S(0) \neq 0$. Montrer que $\frac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 8

D'après Mines-Ponts MP : Soit $(a, \lambda) \in \mathbb{R} \times]-1,1[$. Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$$

1. Montrer que toute fonction de E est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Déterminer les éléments développable en série entière de E.
3. En déduire l'ensemble E

Exercice 9

D'après Mines-Ponts PSI : On appelle *involution* d'un ensemble quelconque E toute application $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. On note alors I_n le nombre d'involutions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ pour $n \geqslant 1$ et on pose $I_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier n on a $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$.
2. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.
3. Calculer I_n sous forme de somme.

Exercice 10

D'après Mines-Ponts MP : Si E est un ensemble fini, on appelle *dérangement* de E toute bijection $f : E \to E$ sans point fixe, c'est à dire telle que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in E$. On notera S_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. On pose par convention $S_0 = 1$.

1. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$.
2. On pose pour tout $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$.
   (a) Montrer que f est bien définie.
   (b) Montrer que $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.
   (c) En déduire la formule $S_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   (d) Montrer que $S_n = \left\lfloor \dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$ pour tout $n \geqslant 1$.

Corrigé de l'exercice 1

Pour le rayon de convergence, on se donne $x \geqslant 0$ et on a les cas suivants sur le terme général de la série entière :

$$n^{(-1)^n} \begin{cases} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pour } x \in [0,1[\text{ croissances comparées} \\ \text{non bornée pour } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Par définition, le rayon de convergence R est $R = \sup\{x \in \mathbb{R}^+/(a_n x^n) \text{ est bornée }\}$ donc on a $R = 1$. De plus, pour $x = \pm 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0 et la série diverge. Le calcul de la somme s'effectuera pour $x \in]-1,1[$.

Notons $S(x)$ la somme de la série entière en question. On distingue le cas sur la parité de n pour son calcul :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

On calcule alors les deux sommes séparément :

$$\begin{aligned} U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n} &= x\sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n-1} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n}\right) \\ &= x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) = \sum_{n=1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{2n}\right) dt = \int_0^x \frac{t^2}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^x \left[-1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t}\right] dt = -x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

On rappelle en ce sens que les séries entières sont dérivables et intégrables termes à termes sur leur intervalle ouvert de convergence. On conclut que :

$$S(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} - x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Corrigé de l'exercice 2

Notons pour toute la suite $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a $1 \leqslant H_n \leqslant n$, donc le rayon de convergence de $\sum H_n x^n$ est 1. On a la divergence grossière en $x = \pm 1$.

Pour calculer la somme de cette série, on peut penser à une *transformation d'Abel*. En effet, posons pour tout $n \geqslant 1$ et $x \in]-1,1[$: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{x^n - 1}{1-x}$. On pose par convention $S_0 = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} H_k x^k &= \sum_{k=1}^{n} H_k(S_k(x) - S_{k-1}(x)) = H_n S_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(H_k - H_{k-1})S_k(x) \\ &= \frac{x}{1-x}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k} + \frac{H_n x^n}{1-x}\end{aligned}$$

Le terme $\frac{H_n x^n}{1-x}$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$ par croissance comparée et puisque $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{x\ln(1-x)}{x-1}$$

Remarque : Puisque $\frac{x}{1-x} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^k$, on pouvait penser à faire un produit de Cauchy avec le développement en série entière de $\ln(1-x)$.

Corrigé de l'exercice 3

1. On rappelle que par définition on a :

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R}_+/(|a_n|x^n) \text{ est bornée}\}$$

$$R' = \sup\left\{x \in \mathbb{R}_+/(|a_n|^{-1}x^n) \text{ est bornée}\right\}$$

Il faut alors voir quel est le comportement du produit de bornes supérieures vis à vis des parties.

On a le fait suivant. Soit A et B des parties de $\mathbb{R}^+$. On note :

$$AB = \{ab/(a,b) \in A \times B\}$$

Alors on a la règle $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$ (qui est compatible avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$). Pour cela, notons S et S' les bornes supérieures respectives de A et B.

On montre premièrement que SS' est un majorant de AB. En effet, pour tout $a \in A$ on a $0 \leqslant a \leqslant S$ et de même $0 \leqslant b \leqslant S'$ et donc par produit d'inégalités de nombres positifs on a $0 \leqslant ab \leqslant SS'$.

On montre qu'il s'agit du plus petit des majorants par la caractérisation séquentielle. On sait l'existence de suites $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \to S$ et $b_n \to S'$.

Alors $(a_n b_n)$ est une suite de AB qui converge vers SS'. On achève ainsi la preuve de la propriété.

On revient au problème posé. On a alors par ce qui précède :

$$RR' = \sup\left\{xx'/(x,x') \in (\mathbb{R}^+)^2 \text{ et } (|a_n|x^n) \text{ est bornée}, (|a_n|^{-1}(x')^n) \text{ est bornée}\right\}$$

Supposons par l'absurde que $RR' > 1$. Alors il existe un élément $xx' > 1$ avec $(x,x') \in (\mathbb{R}^+)^2$ et tels que les suites $(|a_n|x^n)$ et $(|a_n|^{-1}(x')^n)$ soient bornées. Mais alors par produit de suites bornées, on trouve que :

$$|a_n|x^n \times |a_n|^{-1}(x')^n = (xx')^n \text{ est bornée}$$

Comme suite géométrique de raison strictement supérieure à 1, ceci est impossible. On conclut bien que $RR' \in [0,1]$.

2. Considérons la suite définie par $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = 2^n$. Il est facile de voir que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{2^n}$ et $R' = 1$. On a donc $RR' \in]0,1[$ ici.

   Remarque : Tous les exemples de séries entières usuelles échouent car on a $R = R' = 1$ ou $R = 0$ et $R' = +\infty$ ou encore pour le cas de suites géométriques $R^{-1} = R'$. Il parait donc naturel de "mixer" les suite.

Corrigé de l'exercice 4

Il suffit d'utiliser l'inégalité classique $|\sin(t)| \leqslant |t|$. On rappelle qu'elle peut-être obtenue par l'étude de la fonction $f : t \mapsto t - \sin(t)$ ou encore par la concavité de la fonction sin.

On a donc $|\sin(a_n)| \leqslant |a_n|$ et par la règle de comparaison des rayons de convergence on a $R \leqslant R'$.

Corrigé de l'exercice 5

1. Il suffit pour cette question de montrer que le rayon de convergence de la série entière qui définit g est infini. En effet, si la série $\sum |a_n|$ converge, son terme général tend vers 0 et elle est bornée, disons par M en module. De ce fait, on a $\left|\dfrac{a_n}{n!}z^n\right| \leqslant M\dfrac{|z|^n}{n!}$.

   Le terme général $\dfrac{|z|^n}{n!}$ est de série convergente (il s'agit même de la série exponentielle) donc par comparaison la série $\sum \dfrac{a_n}{n!}z^n$ est absolument convergente. On trouve donc que le rayon de convergence est infini.

   Le cours nous dit que la fonction somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence. Ici, ce "disque" est $\mathbb{C}$ donc g est continue sur $\mathbb{C}$.