ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2017

prépa

1

# Mathématiques

Option Scientifique

**Mercredi 12 avril 2017 de 8h00 à 12h00**

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :*
*8h00 – 13h20*

L'énoncé comporte 6 pages.



***CONSIGNES***

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, le candidat est autorisé à le conserver à l'issue de l'épreuve.

*Tournez la page s.v.p.*

## EXERCICE 1

On définit sur l'intervalle $\left]0,1\right]$ les deux fonctions $f : x \mapsto x\ln(x)$ et $g : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$.

1.(a) Les fonctions $f$ et $g$ admettent-elles des limites en $0$ ?

(b) Dresser les tableaux de variations des fonctions $f$ et $g$ sur $]0,1]$.

(c) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ est convergente. On notera $I$ sa valeur.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \big(t\ln(t)\big)^n dt,$$

et :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe.

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(c) Calculer $u_0$ et $u_1$.

(d) À l'aide d'intégrations par parties successives, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

(e) Montrer que la série de terme général $u_n$ est convergente.

(f) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function S = somme(n)` qui prend comme paramètre d'entrée un entier naturel $n$ et qui produit en paramètre de sortie la valeur de $S_n$.

3.(a) À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre $n$ appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ et tout entier naturel $n$ :

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big|I - S_n\big| \leqslant \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

(c) Montrer que :

$$I = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}.$$

(d) Écrire une fonction Scilab d'en-tête `function I = estimation(eps)` qui prend comme paramètre d'entrée un réel flottant strictement positif $\varepsilon$ et qui produit en paramètre de sortie une valeur approchée de $I$ à $\varepsilon$ près.

# EXERCICE 2

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tout élément $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que si $x$ est ainsi associé à $X$ et $y$ à $Y$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$<x, y> = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = {}^tXY = {}^tYX,$$

où ${}^tX$ représente la transposée de $X$.

1. On note $J$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (a) Justifier qu'il existe une matrice $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
   $$J = PD\,{}^tP.$$
   (b) Déterminer le rang de $J$. En déduire une valeur propre de $J$ ainsi que la dimension du sous-espace propre associé.
   (c) En examinant la trace de $J$, expliciter la matrice $D$.
2. On note $f$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :
   $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j.$$
   (a) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
   $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right].$$
   (b) Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = {}^tXMX.$$
   (c) Exprimer $M$ comme combinaison linéaire de $J$ et $I$, où $I$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice diagonale $\Delta$ à déterminer telle que :
   $$M = P\,\Delta\,{}^tP.$$
   (e) Montrer que la fonction $f$ admet un minimum et un maximum sur l'ensemble :
   $$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ /\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$
   et déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de $f$ sur $\mathcal{S}$.

Tournez la page s.v.p.

3. Dans cette question, $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont $A$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Justifier que $A$ est diagonalisable et montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
   On note $v$ l'endomorphisme dont $B$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
   (b) À l'aide de $v$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :
   $$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad (<x,y>)^2 \quad \leqslant \quad <u(x),x> \times <u^{-1}(y),y>$$
   Pour un $x \in \mathbb{R}^n$ non nul donné, trouver un $y \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que cette inégalité soit une égalité.
   (c) En déduire que :
   $$\inf_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} (<u(x),x>) \times (<u^{-1}(x),x>) = 1$$
4. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$.
   (b) Montrer que toutes les valeurs propres de $A$ sont strictement positives.
   (c) En déduire le minimum de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
   $$g(x_1,x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)$$
   sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

## PROBLÈME

Toutes les variables aléatoires présentes dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

### Partie A

Dans toute cette partie, $a$ est un réel strictement positif et $g_a$ est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Justifier que $g_a$ est une densité de probabilité.
2. Soit $Z_a$ une variable aléatoire admettant $g_a$ pour densité.
   (a) Soit $N$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée et de variance $a^2$.
   Rappeler une densité de $N$ et donner les valeurs de $E(N)$ et $E(N^2)$.
   (b) Montrer que $Z_a$ admet une espérance et calculer $E(Z_a)$.
   (c) Montrer que $Z_a$ admet une variance et calculer $V(Z_a)$.

**Partie B**

Pour tout entier $n$ strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de $n$ urnes initialement vides, numérotées de 1 à $n$ et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.
On note $X_n$ le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire $X_n$ :

```
function X = tirage(n)
        urnes = zeros(1,n)
        X = 1
        choix = floor((rand()*n))+1
        while ...........
                urnes(choix) = urnes(choix)+1
                choix = floor((rand()*n))+1
                X = ...........
        end
endfunction
```

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.
   Déterminer la loi de $X_1$ ainsi que son espérance et sa variance.
3. On suppose dans cette question que $n = 2$.
   Déterminer la loi de $X_2$ ainsi que son espérance et sa variance.
4. On se place ici dans le cas général, $n$ désigne un entier strictement positif.
   (a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.
   (b) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad P(X_n = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$
   (c) Montrer que pour tout entier strictement positif $n$, $X_n$ admet une espérance.
   (d) On souhaite écrire une fonction Scilab qui calcule $E(X_n)$ en fonction de $n$.
   Compléter la fonction suivante à cet effet :

```
function E = esperance(n)
        facto = prod([1:n])
        fac = facto
        somme = 0
        puissance = n
        for k = 2 : (n+1)
                puissance = ........
                fac = ........
                somme = somme + k*(k-1)/(puissance*fac)
        end
        E = facto * somme
endfunction
```

ECRICOME

**Partie C**

On reprend dans cette partie les variables aléatoires $X_n$ étudiées dans la partie B.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\alpha(n,m) = \sum_{k=0}^{m} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

$$-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$

2. En déduire que pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant \frac{n}{2}$, on a :

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leqslant \alpha(n,m) \leqslant -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

3. On suppose dans cette question que $x \leqslant 0$.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} P\left(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\right))$.
4. On suppose dans cette question que $x$ est un réel $x > 0$.
   (a) Donner la limite puis un équivalent simple de $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   (b) Justifier qu'il existe un entier $N$ tel que :

$$\forall n \geqslant N, \quad \lfloor \sqrt{n}x \rfloor \leqslant \frac{n}{2}.$$

   (c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![2, n+1]\!],\ P(X_n = k) = \frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

   (d) En déduire que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor) = \frac{\lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 1}{n} \exp\left(\alpha(n, \lfloor \sqrt{n}x \rfloor - 2)\right).$$

   (e) Montrer alors que $\sqrt{n}P(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor)$ admet une limite lorsque $n$ tend vers l'infini et déterminer cette limite.

**Partie D**

On **admettra** dans cette partie le résultat suivant :
*Si $W$ est une variable aléatoire et si $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires telles que :*

- $\star$ *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n$ admet une densité $h_n$ ;*
- $\star$ *la variable $W$ admet une densité $h$ ;*
- $\star$ *pour tout réel $x$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x) = h(x)$ ;*

*alors, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $W$.*

On considère toujours dans cette partie la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies dans la partie B. On introduit une variable aléatoire $U$ qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$, que l'on suppose indépendante des variables aléatoires $X_n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{X_n + U}{\sqrt{n}}.$$

On définit enfin, pour tout entier entier strictement positif, la fonction $f_n$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{n}\; P\left(X_n = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor\right).$$

1.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$.
Déterminer l'ensemble des réels $x$ tels que $\lfloor \sqrt{n}x \rfloor = k$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n$ est une densité de probabilité.

2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $P(U \leqslant \sqrt{n}x - k)$.
*On pourra séparer les cas où $k > \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$, $k < \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$ et $k = \lfloor \sqrt{n}x \rfloor$.*

(b) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; P(Y_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt.$$

(c) Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $Y_n$ est une variable aléatoire à densité, et que $Y_n$ admet $f_n$ pour densité.

(d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire $Y$ à densité dont on précisera la densité.

3.(a) Rappeler l'énoncé du Théorème de Slutsky.

(b) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\dfrac{X_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on donnera une densité.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2017

# ECRICOME VOIE SCIENTIFIQUE

**CORRIGE**

## EXERCICE I

**1–a)**

Par croissances comparées, $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Donc $\lim_{x\to 0} \exp(x\ln(x)) = 1$ par continuité au point $0$.

**b)**

La fonction $f$ est continue, dérivable sur $]0,1]$, prolongeable par continuité point $0$.
$\forall x \in \,]0,1],\ f'(x) = 1 + \ln(x)$ ; $f'(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \exp(-1)$ par stricte croissance de l'exponentielle.

La fonction $g$ est continue, dérivable sur $]0,1]$, prolongeable par continuité point $0$.
$\forall x \in \,]0,1],\ g'(x) = f'(x)\exp(f(x))$.

Tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $0$ |

Tableau de variations de la fonction $g$ :

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $1$ | $\searrow$ | $\exp(-\frac{1}{e})$ | $\nearrow$ | $1$ |

**c)**

La fonction $g$ est continue sur $]0,1]$, prolongeable par continuité point $0$.

L'intégrale $\int_0^1 g(t)dt$ est faussement impropre, donc convergente

**2–a)**

La fonction $t \mapsto (t\ln(t))^n$ est continue sur $]0,1]$, prolongeable par continuité en $0$ puisque $\lim_{t\to 0} t\ln(t) = 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n dt \text{ existe}}$$