BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 295

Conception : emlyon business school

1ère épreuve (OPTION SCIENTIFIQUE)

MATHÉMATIQUES

mardi 25 avril 2017, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLEME 1

PARTIE I : Étude d'un exemple

On considère la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible ? Quel est son rang ?

2. Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Déterminer une matrice P de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, et une matrice D de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant, telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n, et $\mathscr{B} = (1,\ X,\ \dots,\ X^n)$ la base canonique de E.

On note, pour tout polynôme P de E, $T(P) = \big(X(X-1)P'\big)'$, où l'accent désigne la dérivation.

Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$, et donc

$$T(P) = \big(X(X-1)2X\big)' = (2X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X.$$

4. Montrer que T est un endomorphisme de E.

5. Calculer, pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, $T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B}$.

6. L'endomorphisme T est-il bijectif ? Quel est le rang de T ? Déterminer $\mathrm{Ker}(T)$.

7. Quelles sont les valeurs propres de T ? L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

PARTIE III : Intervention d'un produit scalaire

On conserve les notations de la partie **II**.

On considère l'application $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

9. Démontrer : $\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi\big(T(P), Q\big) = -\displaystyle\int_0^1 x(x-1)P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x.$

10. En déduire que T est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.
Quel résultat de la partie **II** peut-on retrouver ainsi ?

11. a. Établir : $\forall P \in E, \quad \varphi\big(T(P), P\big) \geqslant 0.$

b. Déterminer l'ensemble des polynômes P de E tels que $\varphi\big(T(P), P\big) = 0$.

PARTIE IV : Retour sur l'exemple de la partie I

On conserve les notations des parties **II** et **III** et on suppose dans cette partie que $n = 2$.

12. Quelle est la matrice de T dans la base $\mathscr{B}$ de E ?

13. En utilisant les résultats obtenus dans la question **3** de la partie **I**, déterminer une base orthonormale $\mathscr{C}$ de E pour le produit scalaire φ, formée de vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de T dans l'ordre croissant.

14. Déterminer, par sa matrice dans la base $\mathscr{C}$ de E, un endomorphisme V de E, symétrique pour le produit scalaire φ, tel que :

$$\begin{cases} V \circ V = T \\ \forall P \in E, \quad \varphi\big(V(P), P\big) \geqslant 0 \end{cases}.$$

PROBLEME 2

On définit la fonction réelle H d'une variable réelle x par : $\qquad H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t.$

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

PARTIE I : Premières propriétés de la fonction H

1. Justifier que la fonction H est définie sur I.

2. Montrer que H est décroissante sur I.

3. **a.** Calculer $H(1)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties : $\quad H(n) = 2n\big(H(n) - H(n+1)\big)$.
En déduire une expression de $H(n+1)$ en fonction de n et de $H(n)$.

c. Écrire un programme en Scilab qui, étant donné un entier n de $\mathbb{N}^*$, renvoie la valeur de $H(n)$.

d. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H(n) = \dfrac{(2n-2)!\,\pi}{2^{2n-1}\big((n-1)!\big)^2}.$

PARTIE II : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $\dfrac{1}{2}$

4. **a.** Montrer que la fonction $\quad \varphi : u \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}}{2} \quad$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Préciser $\quad \varphi^{-1}(0) \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \varphi^{-1}(t)$.

b. A l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$, montrer :

$$\forall x \in I, \quad H(x) = \frac{4^x}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^{2x-1}}\,\mathrm{d}u.$$

5. **a.** Justifier : $\quad \forall u \in [0\,;+\infty[, \quad \mathrm{e}^u \leqslant \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u} \leqslant 2\,\mathrm{e}^u.$

b. En déduire : $\quad \forall x \in I, \quad \dfrac{1}{2x-1} \leqslant H(x) \leqslant \dfrac{4^x}{2(2x-1)}.$

6. Déterminer la limite de H en $\dfrac{1}{2}$ et un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers $\dfrac{1}{2}$.

PARTIE III : Étude de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

7. **a.** Montrer : $\quad \forall u \in [0\,;1], \quad \ln(1+u) \geqslant \dfrac{u}{2}.$

b. A l'aide d'une loi normale bien choisie, montrer que, pour tout x de I, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2/2}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

c. En déduire : $\quad \forall x \in I, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-xt^2/2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$

d. Montrer : $\quad \forall x \in I, \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2x-1}.$

e. En déduire la limite de H en $+\infty$.

8. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \ln\big(H(n)\big) + \dfrac{\ln(n)}{2}$.

a. Déterminer un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **3.b**.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \big(u_{n+1} - u_n\big)$ converge.

c. En déduire l'existence d'un réel K strictement positif tel que : $\quad H(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{n}}$.

9. Donner enfin un équivalent simple de $H(x)$ lorsque le réel x tend vers $+\infty$ à l'aide de K.

PARTIE IV : Étude d'une suite de variables aléatoires

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ \ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+t^2)} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$.

10. Montrer que f est une densité.

11. On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

a. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?

12. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à densité, à valeurs strictement positives, mutuellement indépendantes, dont chacune a pour densité f.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $\quad M_n = \max(X_1, \ldots, X_n) \quad$ et $\quad Z_n = \dfrac{n}{M_n}$.

a. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

b. Justifier : $\quad \forall u \in \,]0\,;+\infty[,\ \ \mathrm{Arctan}(u) + \mathrm{Arctan}\Big(\dfrac{1}{u}\Big) = \dfrac{\pi}{2}$

et $\quad \mathrm{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

c. Montrer alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad \forall x \in \,]0\,;+\infty[,\ \ \mathbf{P}(Z_n \leqslant x) = 1 - \Big(1 - \dfrac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\big(\dfrac{x}{n}\big)\Big)^n$.

d. En déduire que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on reconnaîtra la loi.

• FIN •

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2017

EM-LYON VOIE SCIENTIFIQUE

CORRIGE

PROBLEME 1

PARTIE I : étude d'un exemple

1)

La matrice A n'est pas inversible car sa première colonne est nulle.

Les colonnes 2 et 3 sont libres de manière évidente (on peut aussi écrire l'équation $aC_2 + bC_3 = (0)$ où C_i est la colonne numéro i : on aura tout de suite $b = 0$, donc $a = 0$).

Il en résulte que le rang de A est 2.

2)

La matrice A est diagonale supérieure ; ses valeurs propres sont ses termes diagonaux. En effet, la matrice $A - \lambda I$ est triangularisée ; elle n'est pas inversible si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul, ce qui a lieu si et seulement si λ est un des termes diagonaux de A.

$$\text{spect}(A) = \{0, 2, 6\}$$

On retrouve le fait que A n'est pas inversible car 0 est valeur propre.

$\boxed{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ ; elle possède 3 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable}}$

3)

Il s'agit de chercher pour chaque valeur propre le sous-espace propre associé. Si λ est valeur propre, notons $E(\lambda)$ le sous-espace propre de A associé à la valeur λ.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $AX = \lambda X \iff \begin{cases} -\lambda x - y & = 0 \\ (2-\lambda)y - 4z & = 0 \\ (6-\lambda)z & = 0 \end{cases}$

Les résolutions ne posent aucun problème.

Pour $\lambda = 0$, on trouve $x \in \mathbb{R},\ y = z = 0$

$E(0) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Pour $\lambda = 2$, on trouve $y = -2x,\ z = 0,\ x \in \mathbb{R}$.

$E(2) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Pour $\lambda = 6$, on trouve $y = -6x,\ z = -y,\ x \in \mathbb{R}$.

$E(6) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$

$$\boxed{\text{Pour } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ A = PDP^{-1} \text{ où } D = \mathrm{Diag}(0,2,6)}$$

PARTIE II : étude d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

4)

Remarquons que $(X(X-1)P')' \in \mathbb{R}[X]$.

Si $P \in \mathbb{R}_0[X]$, $P' = 0$, donc $T(P) = 0$.

Si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(X(X-1)P') = 2+\deg(P') = \deg(P)+1$. Donc $\deg((X(X-1)P')') = \deg(P)$.

Conclusion : $\forall P \in E,\ T(P) \in E$.

Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} T(P+\lambda Q) &= (X(X-1)(P+\lambda Q)')' \\ &= ((X(X-1)(P'+\lambda Q')' \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= ((X(X-1)P')' + \lambda(X(X-1)Q')' \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= T(P) + \lambda T(Q) \end{aligned}$$

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}$$

5)

$k = 0$; $X_0' = 0$, donc $T(X_0) = 0$.

$k \geq 1$; $(X(X-1)(X_k)')' = (kX(X-1)X^{k-1})' = k(X^{k+1} - X^k)' = k(k+1)X^k - k^2X^{k-1}$.

D'où la matrice M de T dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & -4 & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -k^2 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & k(k+1) & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & -n^2 \\ 0 & & & & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice M est triangulaire supérieure.

6)

L'endomorphisme T n'est pas bijectif car la première colonne de M est nulle (on peut dire aussi que $T(X^0) = 0$.)

On remarque que les colonnes numérotées $1, 2, \dots, n+1$ sont libres car échelonnées ; en effet, l'application $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $i \neq j \Longrightarrow i(i+1) \neq j(j+1)$. Par suite ces colonnes représentent des polynômes échelonnés en degré puisque $\deg(T(X^k)) = k(k+1)$ pour $k \geq 1$.

Donc $\mathrm{rang}(T) = n$ et par le théorème du rang $\dim \mathrm{Ker}(T) = 1$. Or $X^0 \in \mathrm{Ker}(T)$, par suite $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{vect}(X^0)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}_0[X]}$$

7)

Les valeurs propres de T sont les termes diagonaux de M, ce sont donc les entiers $0, 2, \dots, k(k+1), \dots n(n+1)$.

$\mathrm{spect}(T) = \{k(k+1) \in \mathbb{N} \ / \ 0 \leq k \leq n\}$.

On vient de voir que $i \neq j \Longrightarrow i(i+1) \neq j(j+1)$. Les valeurs propres de T sont deux à deux distinctes.