Le problème qui suit est un ancien sujet du concours de l'ENSAI, année 2001, pour la filière MP. Il s'agit en fait de l'épreuve d'analyse.

Ce problème d'analyse traite un large spectre de notions aux programmes actuels des filières MP, PC et PSI. Il constitue donc un très bon entraînement pour toutes ces filières en vue des concours, notamment pour l'actuel concours CCP voire un peu plus élevé.

Sont abordés dans ce problème les séries entières pour une large part, mais également les suites et séries numériques, l'intégration sur un intervalle quelconque, le théorème de convergence dominée, le théorème d'intégration terme à terme, des intégrales de paramètre réel (continuité, dérivabilité etc) et enfin une équation différentielle à la fin en vue de calculer les éléments précédents du problème.

Il s'agit là d'une révision quasi complète du programme d'analyse très souvent traité dans les problèmes d'écrit aujourd'hui.

Bon travail et bonnes révisions !

Problème

Soit (u_n) une suite de nombre réels. On note alors $(U_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ la suite des sommes partielles associées. Pour x réel, on pose lorsque cela est défini :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n \qquad U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_n}{n!} x^n$$

qui définissent deux fonctions u et U.

- On dira que (u_n) est B-sommable si U est définie sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto e^{-x}U(x)$ admet une limite réelle en $+\infty$. Dans ce cas, on pose $S_B(u) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x}U(x)$.
- On dira que (u_n) est C-sommable si u est définie sur $\mathbb{R}$ et que $y \mapsto \int_0^y e^{-x}u(x)dx$ admet une limite réelle en $+\infty$. Dans ce cas, on pose $S_C(u) = \lim_{y \to +\infty} \int_0^y e^{-x}u(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}u(x)dx$.

Partie I : Deux exemples

1. On considère dans cette question la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.
   (a) La suite (u_n) est-elle B-sommable ?
   (b) La suite (u_n) est-elle C-sommable ?
2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère dans cette question la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n$.
   (a) Déterminer les valeurs de a telles que (u_n) est B-sommable. Le cas échéant, déterminer $S_B(u)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a telles que (u_n) est C-sommable. Le cas échéant, déterminer $S_C(u)$.

Partie II : Cas généraux de B-sommabilité et C-sommabilité

Lorsque la suite (U_n) sera convergente dans $\mathbb{R}$, on notera L sa limite.

3. Si (u_n) est bornée, déterminer l'ensemble de définition de u.

4. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.
   (a) Déterminer les ensembles de définition de u et U.
   (b) Montrer alors que $S_B(u) = L$. On pourra commencer par le cas $L = 0$.
   (c) Dans le cas où $\sum u_n$ est absolument convergente, montrer que $S_C(u) = L$.

5. Donner l'exemple d'une suite (u_n) C-sommable mais telle que $\sum u_n$ diverge.

6. Dans cette question, on suppose que $\sum u_n$ converge et on pose :

$$U_{-1} = 0 \qquad B(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{U_{n-1}}{n!} x^n$$

   (a) Montrer que B est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = \displaystyle\int_0^x \left[e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} t^n \right] dt$.
   (c) En déduire que $S_C(u) = L$.

7. Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est strictement positif, on définit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ est infini. Soit G la fonction somme de la cette série entière.
   (b) Montrer que pour tout $|x| < R$ on a $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G(xt)e^{-t} dt$.

Partie III : Applications

On note H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ et $H(0) = 0$

8. Montrer que H est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme $H(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Préciser le rayon de convergence de cette série entière.

9. (a) Déterminer le rayon de convergence $\sum n! a_n x^n$.

   (b) Exprimer la somme $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n! a_n x^n$ à l'aide de fonctions usuelles.

10. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(xt)e^{-t}dt$.

    (b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $xh(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(u)e^{-\frac{u}{x}}du$.

11. On note pour tout $x > 0$: $\psi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} H(u)e^{-\frac{u}{x}}du$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \int_0^{+\infty} H(u)du$.

12. (a) Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $(E) : xy'' + y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

    (b) Déterminer les solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

    (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}du$.

Indications sur le problèmes

Partie I : Deux exemples

1. (a) Calculer explicitement U_n, puis $U(x)$ (c'est une série entière connue) et conclure sur l'existence de limite pour $e^{-x}U(x)$ (on peut même la calculer).

   (b) Même principe : calculer explicitement $u(x)$ et étudier l'intégrabilité de $x \mapsto e^{-x}u(x)$. Il s'agit d'une intégrale de référence.

2. (a) Les sommes U_n sont géométriques. On distinguera le cas où $a = 1$.

   (b) La somme $u(x)$ est là encore connue. Il suffit d'étudier l'intégrabilité (d'une fonction de référence).

Partie II : Cas généraux de B-sommabilité et C-sommabilité

3. Majorer le terme général de la série définissant u pour montrer qu'elle converge indépendamment de x.

4. (a) Si la série $\sum u_n$ converge, son terme général tend vers 0 et la suite (U_n) converge. On peut utiliser la question précédente.

   (b) Revenir à la définition de la limite avec $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement. On pourra alors découper la somme en deux et écarter le reste de la série correspondante. Pour la somme finie, on fera tendre x vers $+\infty$.

   (c) On peut procéder à une intégration terme à terme (à justifier !) pour inverser $\int$ et Σ.

5. Chercher dans la partie I...

6. (a) Rappeler simplement les conditions de dérivabilité d'une fonction définie par une série entière.

   (b) On peut interpréter la question en disant que la dérivée de B est la fonction sous l'intégrale.

   (c) Utiliser les question précédentes.

7. (a) Pour trouver le rayon de convergence d'une série entière, on peut étudier quand le terme général tend vers 0. La présence de la factorielle doit aider.

(b) Procéder à nouveau à une intégration terme à terme après développement de $G(xt)$.

Partie III : Applications

8. Développer simplement la fonction cos.

9. (a) Il faut pour cela avoir l'expression des coefficients a_n de la question précédente. Le terme $n!a_n$ se simplifie alors très bien par ses factorielle.

   (b) Décomposer le coefficient $n!a_n$ en éléments simples en fonction de n. On doit reconnaître alors des développements en série entière de fonctions usuelles, à quelques termes près.

10. (a) Utiliser une question précédente donnant une formule de ce type.

    (b) Effectuer une changement de variable dans la précédente intégrale. On justifiera qu'il est admissible.

11. Prendre une suite quelconque (x_n) tendant vers $+\infty$ et étudier $\psi(x_n)$ par la convergence dominée. On justifiera alors qu'on a bien la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$ de la variable réelle x.

12. (a) Utiliser le théorème de classe $\mathcal{C}^2$ sous le signe intégral pour exprimer en plus les dérivées de ψ. On prendra garde au fait que seules des dominations locales fonctionnent. Enfin, il faudra calculer l'intégrale définie par $x\psi''(x) + \psi'(x)$.

    (b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dont on connait les solutions de l'équation homogène et on trouve une solution particulière en effectuant une variation de la constante.

    (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}du$ est en fait $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x)$. On peut chercher une expression générale de ψ grâce à l'équation différentielle qu'elle vérifie puis on peut utiliser l'expression connue via les séries entières calculées.