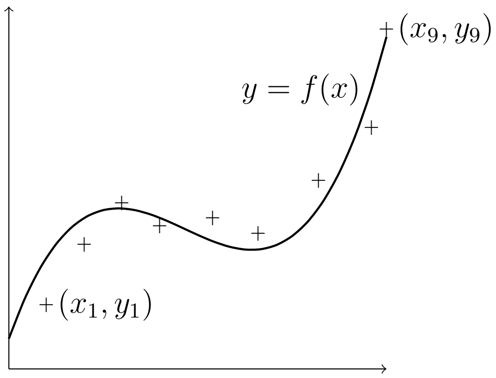
Le problème qui suit est extrait du concours Mines-Ponts de l'année 1998, filière MP (première épreuve de mathématiques). Il s'agit de l'épreuve d'algèbre.

Le sujet traité n'est pas courant. Le but du problème est de déterminer les polynômes d'un certain degré qui minimise une somme de carrés. Il s'agit en fait d'un problème des *moindres carrés*.

Il s'agit concrètement d'approcher un nuage de points par une fonction polynomiale, comme le présente le graphe ci-après :



En complément de ce problème, le lecteur pourra traiter le problème de la *droite des moindres carrés* : étant donné des points (x_i, y_i) dans le plan, trouver les valeurs de a et b rendant minimal la quantité :

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

La droite d'équation $y = ax + b$ porte alors le nom de droite des moindres carrés. Pour le problème, il s'agit en fait du cas des polynômes de degré 1.

Le problème traite donc de calculs polynomiaux au sens large (interpolation polynomiale, racines de polynômes,...) vus à la lumière de la théorie des espaces euclidiens (produits scalaires, normes, orthonormalisation, projection et distance...).

Ce travail constitue plus un approfondissement qu'une simple révision. Les candidats qui visent des concours élevés ont tout intérêt à se lancer dans de tels problèmes qui demandent une très bonne maîtrise des méthodes.

Bon courage !

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul, $(y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ sont $n+1$ nombres réels. L'objet du problème est de déterminer pour tout entier k les polynômes P de $\mathbb{R}_k[X]$ tels que la quantité :

$$d_k(P) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(i))^2$$

soit minimale et de déterminer le minimum m_k.

1. Dans cette question, on définit l'application linéaire $\varphi_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_k[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), ..., P(n)) \end{array}$ où k est un entier quelconque.
   (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_k)$ selon que $k \leqslant n$ ou $k > n$. On établira la forme des polynôme de $\mathrm{Ker}(\varphi_k)$ lorsque celui-ci n'est pas réduit à $\{0\}$. Préciser $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_k))$.
   (b) Déterminer $\mathrm{rg}(\varphi_k)$ selon les valeurs de k. Pour quelles valeurs de k l'application φ_k est-elle surjective ? Injective ? Un isomorphisme ?

2. On étudier ici m_k pour $k \geqslant n$.
   (a) Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme $Y \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ on ait $Y(i) = y_i$. On conserve dans la suite la notation Y du polynôme associé au $n+1$-uplet $(y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$.
   (b) i. Démontrer l'existence et l'unicité d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$ notée $(L_0, ..., L_n)$ telle que pour tous entiers i et j on ait $L_i(j) = 0$ pour $i \neq j$ et $L_i(i) = 1$. (*Indication : on pourra utiliser la base canonique de* $\mathbb{R}^{n+1}$)
   ii. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et plus précisément du polynôme Y.
   (c) Soit $k \geqslant n$. Déterminer la valeur minimale de $d_k(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (y_i - P(i))^2$ et pour quels polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ elle est atteinte.

Pour toute la suite, on prend $k \leqslant n$.

3. On cherche à interpréter dans cette question m_k pour $k \leqslant n$.
   (a) Prouver l'existence et l'unicité d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que la base $(L_0, ..., L_n)$ définie précédemment soit orthonormale pour ce produit scalaire. On précisera l'expression générale de $[P|Q)$ pour tous polynômes P et Q.
   (b) Calculer $(1|1)$, $(1|X)$ et $(1|X^2)$ en fonction de n.

   Pour toute la suite, on notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée à ce produit scalaire

   (c) i. Justifier avec les notations précédentes qu'on a pour tout polynôme P : $d_k(P) = \|Y - P\|^2$.

ii. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$ tel que $m_k = \|Y - P_k\|^2$. On définira P_k relativement au polynôme Y.

iii. Que dire de $Y - P_k$ vis à vis du sous-espace $\mathbb{R}_k[X]$? Faire un schéma.

(d) On suppose ici que $k = 0$. Déterminer P_0, m_0 et comparer m_0 et $\|Y\|^2 - \|P_0\|^2$.

4. On déterminer ici m_k à l'aide d'une base orthogonales de $\mathbb{R}_n[X]$.

(a) Le but de cette question est de construire d'uniques polynômes $(B_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ tels que :

- $B_0 = 1$.
- Pour tout $k \leqslant n$, $(B_i)_{i\in[\![0,k]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[X]$.
- Pour tout $k \geqslant 1$, le polynôme B_k admet pour coefficient dominant $\binom{2k}{k}$.

i. Déterminer B_1 et B_2. On admet que $(1|X^3) = [(1|X)]^2$.

ii. Déterminer B_k à l'aide de X^k et de Q_k, projection orthogonale de X^k sur $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Faire un schéma.

iii. En déduire l'existence et l'unicité de la base $(B_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ vérifiant les trois propriétés demandées.

(b) Montrer que si $k \in [\![1,n]\!]$, le polynôme $B_k(n-X)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. En déduire une relation entre $B_k(n-X)$ et B_k.

(c) Déterminer les coordonnées de P_k, l'unique polynôme réalisant m_k, dans la base (B_i). En déduire les relations :

$$P_k = P_{k-1} + \frac{(B_k|Y)}{\|B_k\|^2}B_k \qquad m_k = m_{k-1} - \frac{(B_k|Y)^2}{\|B_k\|^2}$$

5. Enfin, on étudie les polynômes (B_i) en donnant une relation de récurrence les liant.

(a) Soit $k \in [\![2,n]\!]$, $j \in [\![0,k-2]\!]$. Montrer que $(XB_k|B_j) = 0$.

(b) En déduire l'existence pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$ de $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}$ tels que :

$$X.B_k = \alpha_k B_{k-1} + \beta_k B_k + \gamma_k B_{k+1}$$

(c) Calculer β_k à l'aide de la relation entre $B_k(n-X)$ et B_k.

(d) Calculer γ_k. En déduire $(XB_k|B_{k+1})$ en fonction de k et $\|B_{k+1}\|^2$.

(e) Calculer α_k en fonction de $\|B_k\|^2$ et $\|B_{k-1}\|^2$. En déduire finalement la relation :

$$B_{k+1} = \frac{2k+1}{k+1}\left(B_1B_k - \frac{k}{2k-1}\frac{\|B_k\|^2}{\|B_{k-1}\|^2}B_{k-1}\right)$$

Compléments au problème

On donne $(x_0, ..., x_n)$ et $(y_0, ..., y_n)$ des réels et on cherche la fonction polynomiale de degré 1 (donc affine) $f : x \mapsto ax + b$ qui réalise les moindres carrés.

1. Calculer les valeurs de a et b en fonctions des x_i et y_i qui rendent minimale la quantité :

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

   On pourra utiliser tout résultat du problème précédent ou tout résultat qui en découlerait immédiatement.

2. En notant $\overline{x} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$, montrer qu'on a en fait $b = \overline{y} - a\overline{x}$. Quelle interprétation probabiliste peut-on donner aux valeurs de a et b ?