Le sujet qui suit est extrait de l'ancien concours des école des Mines qui se passait en fin de première année. Il s'agit ici de l'épreuve spécifique à la filière MPSI de l'année 2009.

Les parties qui ne sont plus en adéquation avec l'actuel programme ont été supprimées. Cependant, l'ensemble représente un bon sujet pour le temps imparti pour l'épreuve le jour même du concours, soit 4 heures.

La constitution du sujet est classique. Le premier problème balaye de nombreuses notions d'analyse tandis que le deuxième balaye les notions d'algèbre des polynômes et d'algèbre linéaire. Ce problème se termine par une partie sur les espaces euclidiens avec une ouverture sur la deuxième année (matrices et endomorphismes orthogonaux).

Ce sujet est donc un excellent bilan pour une fin de première année. De même, il est tout à fait adapté à un début de deuxième année, toutes filières confondues, pour bien démarrer l'année en étant certain de bien maîtriser les notions indispensables pour aborder sereinement le programme de deuxième année.

Il ne reste plus qu'à vous souhaiter bon courage et toute la réussite !

Problème 1

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3xe^{-x^2} - 1$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Partie I : Etude d'une fonction

1. Etudier les variations de f et les limites aux bornes.
2. Donner l'équation de la tangente (T) en 0 et étudier la position de $\mathcal{C}_f$ et (T) en 0.
3. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ avec tous les éléments possibles.
4. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre en 0 et le donner à l'ordre 5.
5. Calculer pour tous a et b réels $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Partie II : Etude d'une équation différentielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation différentielle $xy' - (n - 2x^2)y = n - 2x^2$
On notera (H_n) l'équation homogène (donc sans second membre) associée à (E_n).

6. Résoudre (H_n) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
7. En déduire les solutions de (E_n) sur chacun des intervalles.
8. Déterminer toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On distinguera $n = 1$ et $n \geqslant 2$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Partie III : Etude de deux suites

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. On définit alors $f_n(x) = 3x^n e^{-x^2} - 1$.

9. Etudier les variations de f_n sur $[0, +\infty[$ et sa limite en $+\infty$. En déduire l'existence de deux solutions $u_n < 1 < v_n$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
10. Déterminer la limite de (v_n) en $+\infty$ (justifier).
11. On va maintenant étudier la suite (u_n).
    (a) Exprimer $e^{-(u_n)^2}$ en fonction de $(u_n)^n$.
    (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
    (c) Démontrer que $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est monotone et donner son sens de variation.
    (d) En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est convergente. On note $l = \lim u_n$.

12. Soit g_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g_n(t) = \ln(3) + n\ln(x) - x^2$.
    (a) Pour tout $t > 0$, démontrer l'équivalence $g_n(t) = 0 \iff f_n(t) = 0$.
    (b) Démontrer par un raisonnement par l'absurde que $l = 1$.
    (c) On note alors pour tout $n \geqslant 2$ $w_n = u_n - 1$. Calculer un développement asymptotique de $g(1 + w_n)$ puis donner un équivalent simple de w_n.

Problème 2

Pour toute la suite, on note n un entier naturel fixé et T un polynôme de degré n. On définit f l'application de $\mathbb{C}[X]$ qui à tout polynôme P lui associe $Q + XR$ où Q et R sont respectivement les quotient et reste dans la division euclidienne de $P(X^2)$ par T. On notera également f_n la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie I : Etude de l'application f_n

1. Montrer que f est linéaire et que f_n est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. On fixe dans cette question $n = 2$ et $T = X^2$.
    (a) Donner la matrice A de l'application f_2 dans la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$.
    (b) En calculant A^2 identifier f_2 ainsi que son application réciproque.

Partie II : Etude d'un cas particulier

Dans cette partie seulement, on prend $n = 3$, $a \in \mathbb{C}$ et $T = X^3 + X^2 + a$.

3. Démontrer que f_3 admet pour matrice dans la base canonique $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -a-1 \\ 1 & 0 & a+1 & 1+a+a^2 \\ 0 & 0 & -a & -a-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$.
4. Calculer $\mathrm{Det}(f_3)$ et en déduire les valeurs de a pour lesquelles f_3 n'est pas bijective.
5. Dans cette question on fixe $a = -1$.
    (a) Donner une base de chacun des espace $\mathrm{Ker}(f_3)$ et $\mathrm{Im}(f_3)$.
    (b) A-t-on $\mathbb{C}_3[X] = \mathrm{Ker}(f_3) \oplus \mathrm{Im}(f_3)$?

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Partie III : Etude du noyau de f

6. Si P est un polynôme de degré p avec $2p < n$, montrer que $P \notin \mathrm{Ker}(f)$.
7. Démontrer l'équivalence : $P \in \mathrm{Ker}(f) \iff (\exists R \in \mathbb{C}_n[X] / P(X^2) = (1 - XT).R)$.
8. En déduire que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{C}_n[X]$.
9. Déduire également de 7. que si $P \in \mathrm{Ker}(f)$ et que k est tel que $\deg(P) + k \leqslant n$, alors on a aussi $X^k P \in \mathrm{Ker}(f)$.
10. On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$. On note alors $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturels k tels qu'il existe un polynôme de degré k dans $\mathrm{Ker}(f)$.
    (a) Justifier que $\mathcal{I}$ admet un plus petit élément que l'on notera d.
    (b) Si P_0 et P_1 sont deux polynômes de degré d de $\mathrm{Ker}(f)$, démontrer qu'ils sont associés.
    (c) Démontrer l'équivalence : $P \in \mathrm{Ker}(f) \iff \exists S \in \mathbb{C}_{n-d}[X] / P = SP_0$.
11. Dans le cas où $T = X^3 + X^2 - 1$, déterminer le noyau de f.

Partie IV : Etude de produits scalaires

On choisit ici $n = 2$ et $T = X^2$. et on considère g la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$.
Sa matrice dans la base canonique est toujours A définie dans la partie I.
On définit alors pour tous U, V de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$< U, V >= U(1)V(1) + U'(1)V'(1) + U''(1)V''(1)$$

12. Démontrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
13. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^2[X]$ pour $< ., . >$.
    On dit qu'un endomorphisme φ est *orthogonal* pour un produit scalaire quelconque $(|)$ sur $\mathbb{R}_2[X]$ si l'image d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ (pour $(|)$) est encore une base orthonormale.
14. Démontrer qu'un endomorphisme φ est orthogonal *si et seulement si* sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tMM = M\,{}^tM = I$ (matrice identité). Le cas échéant, on dit aussi que M est *orthogonale*.
15. Prouver l'égalité ${}^tAA = A\,{}^tA = I$. Pour quel produit scalaire g est-il orthogonal ?
16. Calculer $< 1, 1 >$ et $< g(1), g(1) >$: la matrice de g dans la base $\mathcal{O}$ est-elle orthogonale ? Justifier.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Indications sur le problème

Indications sur le problème 1

Partie I : Etude d'une fonction

1. La dérivation ne comporte aucune difficulté, son signe non plus. Pour réduire le domaine d'étude, on pourra remarquer l'imparité de la fonction $f+1$.

2. Utiliser la formule de l'équation de la tangente ou son coefficient directeur et un point de passage de cette droite. Pour la position relative, étudier le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$ si (T) est d'équation $y=ax+b$.

3. Afin de tracer correctement une courbe représentative sans le faire "point par point", on commence par placer les asymptotes, les tangentes horizontales, les autres tangentes connues et savoir comment se positionne la courbe par rapport à ces droites. Quelques points (4 ou 5) suffisent à avoir une belle allure de cette courbe.

4. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$. Une célèbre formule assure l'existence d'un tel développement limité (que l'on n'utilise que rarement en pratique). Pour le calcul à l'ordre 5, développer le terme e^{-x^2}.

5. Pour trouver une primitive de f, repérer une forme $u'e^u$.

Partie II : Etude d'une équation différentielle

6. Résoudre (H_n) suppose de trouver une primitive de $\dfrac{n-2x^2}{x}$. Cela ne doit pas poser de problème...

7. Il faut une solution particulière de (E_n) pour conclure. On peut envisager d'utiliser la méthode de variation de la constante, mais une certaine fonction constante est solution évidente...

8. Toute solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ l'est également sur les deux intervalles de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, dont on connaît les formes selon ce qui précède. Il faut alors que la fonction définie par morceaux soit continue, puis dérivable et enfin $\mathcal{C}^1$ en 0. Cela devrait imposer des conditions sur les constantes, et peut-être sur n selon ce que suggère l'énoncé.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.

Partie III : Etude de deux suites

9. Là encore, la dérivation et l'étude du signe ne pose pas de problème. Penser à étudier $f_n + 1$. Ensuite, on utilisera le théorème de la bijection.

10. De par les variations de f_n, montrer que la borne inférieure de l'intervalle contenant v_n tend elle-même vers l'infini.

11. (a) Puisque $f_n(u_n) = 0$, on ne doit pas avoir de mal à isoler $e^{-(u_n)^2}$.

    (b) Utiliser l'expression de $e^{-(u_n)^2}$ pour simplifier l'expression de $f_{n+1}(u_n)$. Le signe est alors évident.

    (c) Le signe de $f_{n+1}(u_n)$ et le sens de variation de f_{n+1} donne la comparaison de u_{n+1} et u_n, sachant que par définition on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$.

    (d) Il faut utiliser ici un important théorème dont l'une des hypothèses est la monotonie d'une suite (et qui en assure la convergence, mais quand... ?).

12. (a) Le lien entre $g_n(t)$ et $f_n(t)$ peut se faire via ln.

    (b) Si u_n avait une limite différente de 1 (donc strictement supérieure à 1), étudier ce qui se passe dans $g_n(u_n) = 0$ lorsque $n \to +\infty$.

    (c) On a encore $g(1 + w_n) = 0$. Un développement asymptotique de $g(1 + w_n)$ ainsi que l'isolement de w_n puis un passage à l'équivalent doit donner le résultat (il s'agit de jouer sur les termes négligeables).

Indications sur le problème 2

Partie I : Etude de l'application f_n

1. Il faut montrer que l'on a toujours $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$. Chaque membre de la précédente égalité doit être un reste d'une certaine division euclidienne. Un argument d'unicité sera alors essentiel...

2. (a) Il faut calculer $f_2(1)$, $f_2(X)$ et $f_2(X^2)$ et les reclasser dans la base canonique $1, X, X^2$ pour avoir A.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 14 pages.