Le problème ci-dessous est extrait du concours EITPE de l'année 1987 pour les candidats aux options M,P et T de deuxième année de Spéciale comme on le disait à l'époque (disons qu'aujourd'hui, il serait possible de poser ce sujet à tous les candidats MP/PC/PSI, peut-être un peu moins PT).

Il s'agit dans un premier temps d'étudier les opérations élémentaires sur les matrices bien connues de tous mais à travers le produit matriciel. C'est un élément de culture mathématique essentiel.

On prouve en fin de première partie que toute matrice du groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme un produit de *commutateurs* de transvections, un fait majeur pour toute la suite du problème.

C'est par ce fait d'écriture en produits particuliers qu'il est possible de trouver nombre de propriétés à toute application dite multiplicative ou pseudo-multiplicative.

En somme de nombreux points sont abordés dans ce problème sur le calcul matriciel (produit, inverse, opérations élémentaires, déterminant, endomorphismes...) mais sans aborder la réduction des endomorphismes qui est le coeur du programme de deuxième année.

Il s'agit donc d'un excellent sujet de révision pour une bonne entrée en deuxième année avant de préparer le programme propre de deuxième année.

A tous un bon courage pour aborder ce problème et ne lâchez rien !

Problème

Partie I : matrice comme produit de matrices de *transvection*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on note E_{ij} la matrice dont le seul coefficient non nul vaut 1 à la i-ème ligne et j-ème colonne.

On supposera pour l'instant que $n \geqslant 2$.

1. (a) Calculer pour tout $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$ le produit $E_{ij}E_{kl}$.
   (b) On appelle matrice de *transvection* toute matrice de la forme $T_\lambda = I_n + \lambda E_{ij}$ où $i \neq j$. Montrer que T_λ est inversible et déterminer $(T_\lambda)^{-1}$.
   (c) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les lignes seront notées L_i, montrer que l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ peut s'effectuer en multipliant A à gauche par une matrice à déterminer. Même question sur les colonnes avec une multiplication à droite.
   (d) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les lignes seront notées L_i, montrer que l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$) peut s'effectuer en multipliant A à gauche par une matrice à déterminer. Même question sur les colonnes avec une multiplication à droite.
2. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un coefficient non nul sur sa première ligne. Montrer qu'il existe des matrices $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produits de matrices de la forme $I_n + \lambda E_{ij}$, telles que l'on ait :
$$B = PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \qquad B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$
3. On suppose que A est de rang $r > 0$. Montrer qu'il existe des matrices $P_1, Q_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, produits de matrices de la forme $I_n + \lambda E_{ij}$ telles que :
$$B_1 = P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & d & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, d \neq 0 \text{ en position } (r,r)$$
Montrer de plus que si $r < n$, on peut choisir $d = 1$.
4. Soit $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \mathrm{Det}(A) = 1\}$. Montrer que toute matrice de $SL_n(\mathbb{K})$ peut s'exprimer comme produit de matrice de la forme $I_n + \lambda E_{ij}$.

Pour la suite du problème, on suppose que $n \geqslant 3$.

5. Montrer que toute matrice de la forme $I_n + \lambda E_{ij}$ peut s'exprimer sous la forme d'un *commutateur* de matrice de la même forme, c'est à dire qu'il existe $A = I_n + \alpha E_{ij}$, $B = I_n + \beta E_{kl}$ telles que :

$$I_n + \lambda E_{ij} = ABA^{-1}B^{-1} = [A, B]$$

Partie II : application multiplicative

On considère à présent une application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant :

(i) $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B)$
(ii) Si D est une matrice diagonale, $\Phi(D)$ est le produit des coefficients diagonaux de D.

6. Si $i \neq j$, montrer que pour tout $t \in \mathbb{K}$ on a $\Phi(I_n + tE_{ij}) = 1$.
7. Montrer qu'en fait on a $\Phi(A) = \mathrm{Det}(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie III : application pseudo-multiplicative

On considère ici une application $\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to E$ où E est un ensemble quelconque telle que pour toutes matrices A, B, C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $\Psi(ABC) = \Psi(ACB)$.

8. Montrer que Ψ vérifie également : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \Psi(AB) = \Psi(BA)$.
9. Démontrer que pour toutes $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $U \in SL_n(\mathbb{K})$ on a $\Psi(AU) = \Psi(UA) = \Psi(A)$.
10. Pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, on définit la matrice par blocs $X_r = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
    (a) Montrer que pour toute matrices A, B on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A) < n \Longrightarrow \Psi(A) = \Psi(B)$.
    (b) Montrer qu'il existe une matrice Y de rang r telle que $X_{r-1} = YX_r$ et $Y = X_rY$. (*On pourra raisonner sur les endomorphismes associés*).
    (c) Montrer alors que Ψ est constante sur l'ensemble des matrices de rang strictement inférieur à n.
11. Montrer enfin que pour toutes matrices A, B, on a $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(B) \Longrightarrow \Psi(A) = \Psi(B)$

Indications sur le problème

Partie I : matrice comme produit de matrices de *transvection*

1. (a) Reprendre la formule générale donnant le coefficient d'un produit matriciel. On devra examiner les cas où un terme 1×1 apparaît dans la matrice, les autres sont nécessairement nuls.

   (b) On peut appliquer l'algorithme d'inversion en bordant par la matrice identité. On peut aussi chercher l'inverse d'une transvection comme étant une autre transvection. On en trouve le coefficient en étudiant le produit.

   (c) Inverser les lignes d'une matrice, c'est inverser des coefficients dans la matrice. Il faut envisager de positionner des 1 dans la matrice multipliante pour pourvoir faire cette opération, que ce soit pour les lignes ou les colonnes.

   (d) Penser ici aux matrice de transvections.

2. On doit savoir selon la partie I que la multiplication par des transvections réalise une opération sur la matrice. Il suffit de correctement coder les opérations à faire (par le *pivot de Gauss*) pour pouvoir le faire. A faire en premier : placer un coefficient 1 en position $(1, 1)$ dans la matrice.

3. Il faut itérer l'algorithme précédente sur la sous-matrice B'. Il est inutile de le détailler, mais il faut examiner les cas d'arrête de l'algorithme notamment l'absence de coefficient non nul sur une ligne ou colonne.

4. Identifier que $d = \mathrm{Det}(A)$. La matrice diagonale centrale obtenue doit alors être une matrice bien connue...

5. Avec les données, effectuer le calcul complet par développement de $ABA^{-1}B^{-1}$. On commencera par AB, c'est identique pour $A^{-1}B^{-1}$ (on doit connaître l'expression de chaque)... Il faudra ensuite choisir des valeurs de α et β qui conviennent.

Partie II : application multiplicative

6. Calculer l'image d'un commutateur par Φ.

7. Montrer dans un premier temps que $\Phi(M) = 1$ pour toute matrice de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ sachant qu'elle est toujours produit de transvections. Utiliser l'écriture en produit avec une matrice diagonale comportant $d = \mathrm{Det}(A)$ en toute fin de diagonale.