ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 12

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1)

Soit u un endomorphisme non nul de E tel que, pour tout vecteur x de E, il existe un entier naturel $q_x \geq 1$ tel que $u^{q_x}(x) = 0$.

Montrer qu'il existe un entier $q \geq 2$ tel que, pour tout vecteur x de E, $u^q(x) = 0$.

Soit alors p l'unique entier naturel ≥ 2 tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$.

2)

Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

3)

Soit v l'application définie par $v = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k$.

a) Montrer que v est bien définie et que c'est un endomorphisme de E.

b) Montrer que v est bijectif.

4–a)

Déterminer une relation entre $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(v - \mathrm{Id})$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de v.

5)

Dans cette question, $E = \mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré ne dépasse pas n. On définit u par :

$u \ : \ P \mapsto Q \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ Q(x) = P(x+1) - P(x)$; on pourra écrire $Q(X) = P(X+1) - P(X)$

Montrer que u est un endomorphisme de E vérifiant les hypothèses de l'exercice.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.