ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 12

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1)

Soit u un endomorphisme non nul de E tel que, pour tout vecteur x de E, il existe un entier naturel $q_x \geq 1$ tel que $u^{q_x}(x) = 0$.

Montrer qu'il existe un entier $q \geq 2$ tel que, pour tout vecteur x de E, $u^q(x) = 0$.

Soit alors p l'unique entier naturel ≥ 2 tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$.

2)

Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

3)

Soit v l'application définie par $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k$.

a) Montrer que v est bien définie et que c'est un endomorphisme de E.

b) Montrer que v est bijectif.

4–a)

Déterminer une relation entre $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(v - \operatorname{Id})$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de v.

5)

Dans cette question, $E = \mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels dont le degré ne dépasse pas n. On définit u par :

$u \;:\; P \mapsto Q \;/\; \forall x \in \mathbb{R},\; Q(x) = P(x+1) - P(x)$; on pourra écrire $Q(X) = P(X+1) - P(X)$

Montrer que u est un endomorphisme de E vérifiant les hypothèses de l'exercice.