ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 10

Soit $n \in \mathbb{Z}$; on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.

1)

Pour quelles valeurs de n le réel u_n est-il défini ?

2–a)

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave et en déduire que pour tout $x \in [0,1],\ x\ln 2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

b) Montrer que : $\forall n \geq -1,\ \ln 2 \leq (n+2)u_n \leq 1$.

c) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$?

3)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-x)^k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Etudier les suites $(T_{2p})_{p\geq 0}$ et $(T_{2p+1})_{p\geq 0}$ et en déduire la nature de la suite T_n.

4–a)

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{x^{n+1}}{1+x} = (-1)^n S_n(x) + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{1+x}$.

b) En intégrant par parties, en déduire :

$$(n+1)u_n = (1+(-1)^n)\ln 2 + (-1)^{n+1}T_n$$

5–a)

En déduire un encadrement de la suite (T_n).

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$.

b) En déduire la nature de la suite (nu_n).

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.