



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 10

Soit $n \in \mathbb{Z}$; on note $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$.

1) _____

Pour quelles valeurs de n le réel u_n est-il défini ?

2-a) _____

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave et en déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $x \ln 2 \leq \ln(1+x) \leq x$.

b) Montrer que : $\forall n \geq -1$, $\ln 2 \leq (n+2)u_n \leq 1$.

c) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$, de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$?

3) _____

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-x)^k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Etudier les suites $(T_{2p})_{p \geq 0}$ et $(T_{2p+1})_{p \geq 0}$ et en déduire la nature de la suite T_n .

4-a) _____

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{x^{n+1}}{1+x} = (-1)^n S_n(x) + (-1)^{n+1} \frac{1}{1+x}$.

b) En intégrant par parties, en déduire :

$$(n+1)u_n = (1 + (-1)^n) \ln 2 + (-1)^{n+1} T_n$$

5-a) _____

En déduire un encadrement de la suite (T_n) .

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

b) En déduire la nature de la suite (nu_n) .