



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 9

1-a)

Prouver que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\sum_{j=2}^k \frac{1}{j} \geq \ln\left(\frac{k+1}{2}\right)$.

b) Justifier que, pour tout réel $u < 1$, on a $\ln(1-u) \leq -u$.

c) On définit une suite (a_n) par :

$$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall k \geq 2, a_k = (-1)^{k-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2} \prod_{j=2}^k \frac{2j-3}{2j}$$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $|a_k| \leq \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

2-a)

Soit $g :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(t) = \sqrt{1+t}$.

Montrer que : $\forall t > -1, \forall k \in \mathbb{N}, g^{(k)}(t) = k! a_k (1+t)^{\frac{1}{2}-k}$ où $g^{(k)}$ est la dérivée $k^{\text{ème}}$ de g .

On admet l'inégalité suivante :

$$\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left| g(t) - \sum_{k=0}^n g^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{0 \leq u \leq t} |g^{(n+1)}(u)|.$$

Montrer que $\forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \left| g(t) - \sum_{k=0}^n a_k t^k \right| \leq t^{n+1} \left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

b) Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = \int_0^1 t^{-x} \sqrt{1+t} dt$.

Déterminer l'ensemble de définition D de f .

c) Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1-x}$