ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 9

1–a)

Prouver que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\displaystyle\sum_{j=2}^{k} \frac{1}{j} \geq \ln(\frac{k+1}{2})$.

b) Justifier que, pour tout réel $u < 1$, on a $\ln(1-u) \leq -u$.

c) On définit une suite (a_n) par :

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall k \geq 2,\ a_k = (-1)^{k-1}\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-3)}{2^k k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{2}\prod_{j=2}^{k}\frac{2j-3}{2j}$$

Montrer que pour tout $k \geq 1$, $|a_k| \leq \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{3}{2}}$.

2–a)

Soit $g\ :]-1,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(t) = \sqrt{1+t}$.

Montrer que : $\forall t > -1,\ \forall k \in \mathbb{N},\ g^{(k)}(t) = k! a_k (1+t)^{\frac{1}{2}-k}$ où $g^{(k)}$ est la dérivée k ème de g.

On admet l'inégalité suivante :

$$\forall t \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|g(t) - \sum_{k=0}^{n} g^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!}\right| \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{0 \leq u \leq t}|g^{(n+1)}(u)|.$$

Montrer que $\forall t \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|g(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right| \leq t^{n+1}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

b) Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}dt$.

Déterminer l'ensemble de définition D de f.

c) Montrer que, pour tout $x \in D$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a_k}{k+1-x}$