ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 3

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1–a)

Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

2)

Dans cette question p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_p[X],\ f_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k).$$

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Etablir la relation :

$$f_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

c) Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ les réels vérifiant $X^p = \sum_{k=0}^{p} a_k H_k$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![0, p]\!],\ a_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.