ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ECE

ENONCE NUMERO 3

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1–a)

Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

2)

Dans cette question p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_p[X],\ f_i(Q) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k).$$

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Etablir la relation :

$$f_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

c) Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ les réels vérifiant $X^p = \sum_{k=0}^{p} a_k H_k$. Montrer que :

$$\forall i \in [\![0, p]\!],\ a_i = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p.$$