Le problème qui va suivre est un extrait de l'ancien concours d'entrée aux écoles des Mines d'Albi, d'Alès, de Douai et de Nantes communément appelé le concours des "petites Mines" qui se passait avant 2009 en fin de première année de CPGE pour toutes les filières.

Il s'agit d'un des deux problèmes de l'épreuve spécifique aux MPSI de l'année 2001. L'épreuve originale durant 4 heures, on peut considérer que ce problème doit être traité sur 2 heures pour bien se rendre compte de ce qui est exigé aux concours dans un temps limité, même si l'énoncé est long.

Il ne s'agit pas de l'énoncé exact qui a été posé le jour du concours, mais il est totalement fidèle à l'esprit de l'épreuve et il comporte quelques adaptations, notamment pour répondre aux exigences des nouveaux programmes. Pour ce problème là, des questions ont été omises car elles sont devenues impossibles à traiter avec les actuels outils des programmes.

Il s'agit donc d'un bon entraînement pour les élèves en fin de première année, mais aussi pour ceux qui vont débuter leur deuxième année. Il faut en effet affermir ses connaissances de première année pour bien débuter une année à concours qui sera bien chargée !

Le sujet principal est la définition de fonctions sur $\mathbb{R}$ par une équation définie via une intégrale.

Après quelques exemples, montrant des études explicites, des conditions nécessaires d'existence, on donne les propriétés générales de fonctions définies de la sorte (continuité, limite, dérivabilité, parité, symétries de la courbes...). De nombreuses questions sont consacrées au tracé de courbes après une étude soigneuse, des questions qui sont de plus en plus mal traitées par les candidats aujourd'hui.

L'ensemble constitue une très large révision de l'ensemble des notions sur les fonctions de variables réelles. On apportera un soin tout particulier à la vérifications des hypothèses permettant l'utilisation de certains théorèmes, ainsi qu'à la quantification précise des phrases logiques.

Il ne reste qu'à vous souhaiter bon courage pour traiter ce problème et faire une bonne synthèse de vos connaissances !

Problème (*d'après Ecoles des Mines 1ère année*)

Dans tout le problème, φ désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et strictement positive admettant de plus une limite $l \in [0, +\infty]$ (donc éventuellement avec une limite infinie).

Le but du problème est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : pour tout réel x, $f(x)$ est l'unique solution de l'équation en y :

$$(E_x) : \quad \int_x^y \varphi(t)dt = 1$$

Partie I : un exemple

Dans cette partie, φ est la fonction exponentielle.

1. Calculer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Etudier f (variation et limites aux bornes).
3. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f et préciser la position relative de la courbe et la droite.
4. Tracer la courbe de représentative de f.

Partie II : existence de f pour $l \neq 0$

5. Dans cette question, on choisit $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\pi(t^2+1)}$.
   (a) Calculer pour tout x et y réels l'intégrale $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)dt$.
   (b) Que dire de l'équation (E_x) dans ce cas ?

Dans toute la suite du problème, on suppose que $l \neq 0$ et on note pour tout réel x la fonction $\Phi_x : u \mapsto \displaystyle\int_x^u \varphi(t)dt$

6. Montrer que Φ_x est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. On étudier ici la limite de Φ_x en $+\infty$.
   (a) Montrer qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $A > 0$ tel que $t \geqslant t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geqslant A$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{u\to+\infty} \Phi_x(u) = +\infty$.
   (c) Que dire alors de l'équation (E_x) ?

Partie III : Etude de la fonction f

8. Montrer en justifiant l'écriture que $f : x \mapsto \Phi_0^{-1}(\Phi_0(x)+1)$.
9. En déduire que si φ ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f' : x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(f(x))}$
10. On étudie ici l'allure de la courbe de f en $+\infty$.
    (a) Si $l = +\infty$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant a \Rightarrow \varphi(x) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ puis que $x \geqslant a \Rightarrow |f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que dire alors de la courbe de f ?
    (b) Effectuer l'étude lorsque $l \in \mathbb{R}$.
11. On suppose ici que φ est paire.
    (a) Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe de f. Montrer que $(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow (-y, -x) \in \mathcal{C}_f$.
    (b) Quelle symétrie possède $\mathcal{C}_f$?

Partie IV : un dernier exemple

12. Ici on suppose que $\varphi : t \mapsto t^4 - 2t^2 + 1$. Sans calculer f, proposer une allure de $\mathcal{C}_f$.

Indications sur le problème

Partie I : un exemple

1. L'intégrale $\int_x^y \varphi(t)dt$ est simple à calculer et l'équation (E_x) aussi simple à résoudre.

2. f est clairement dérivable, le signe de la dérivées est fixe. On donne aussi facilement ses limites aux bornes par opérations et composition.

3. On doit étudier la différence $f(x) - x$ et montrer qu'elle tend vers 0 en $+\infty$. On peut aussi par factorisation à l'intérieur du logarithme pour écrire $f(x) = x + \epsilon(x)$. Pour le position relative, il faut étudier le signe de $f(x) - x$ donc de $\epsilon(x)$.

4. On doit placer en priorité les asymptotes, les tangentes particulières et quelques autres pour éviter à tout prix un tracé "points par points" !

Partie II : existence de f pour $l \neq 0$

5. (a) Il s'agit d'utiliser ici une primitive usuelle et très classique.

   (b) Une équation n'admet pas toujours des solutions...

Dans toute la suite du problème, on suppose que $l \neq 0$ et on note pour tout réel x la fonction $\Phi_x : u \mapsto \int_x^u \varphi(t)dt$

6. La fonction Φ_x est l'intégrale de la borne supérieure d'une fonction continue. Cela doit faire appel à la notion de primitive. Pour la stricte croissance, donner simplement le signe de la dérivée.

7. On étudier ici la limite de Φ_x en $+\infty$.

   (a) La limite l de φ est strictement positive. On pourra choisir A en fonction de l et écrire la définition logique de la relation $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = l$.

   (b) Il s'agit ici de minorer $\Phi_x(u)$ par une quantité de limite $+\infty$. Cela est possible avec la précédente minoration.

   (c) On pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires (soigneusement cité avec ses hypothèses incontournables...) pour prouver que (E_x) admet bien une solution.