Le problème qui va suivre est un extrait de l'ancien concours d'entrée aux écoles des Mines d'Albi, d'Alès, de Douai et de Nantes communément appelé le concours des "petites Mines" qui se passait avant 2009 en fin de première année de CPGE pour toutes les filières.

Il ne s'agit pas de l'énoncé exact qui a été posé le jour du concours, mais il est totalement fidèle à l'esprit de l'épreuve et il comporte quelques adaptations, notamment pour répondre aux exigences des nouveaux programmes.

Il s'agit donc d'un bon entraînement pour les élèves en fin de première année, mais aussi pour ceux qui vont débuter leur deuxième année. Il faut en effet affermir ses connaissances de première année pour bien débuter une année à concours qui sera bien chargée !

Le sujet principal est le calcul de l'exponentielle de matrice, qui comme le verront les étudiants de la filière MP en deuxième année peut se définir par la formule suivante :

$$e^A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}$$

C'est en deuxième année que l'on donnera précisément un sens (notamment à la limite introduite).

Le problème ne propose pas un calcul général d'une exponentielle de matrice, mais des cas particuliers faisant appel à des notions bien connues de la première année (nilpotence) et le changement de base (qui n'est autre dans la partie II qu'une *diagonalisation*).

L'ensemble constituera une très bonne révision de nombreuses notions sur le calcul matriciel (calcul algébrique, calcul de puissances...) ainsi qu'une utilisation d'endomorphisme pour obtenir une réduction de matrice via un changement de base. Quelques notions d'algèbre générales comme les *groupes*, seulement pour les MPSI-MP, font également des apparitions (il s'agit en fait d'un cas particulier de *sous-groupe à un paramètre*).

Il ne reste qu'à vous souhaiter bon courage pour traiter ce problème et faire une bonne synthèse de vos connaissances !

Problème (*d'après Ecoles des Mines 1ère année*)

Dans tout le problème, p est un entier naturel non nul. $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice 3** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Partie I : exponentielle de matrice nilpotente

Dans toute cette partie, A est une matrice nilpotente d'ordre 3 de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On considère pour tout $t \in \mathbb{R}$ les matrices : $E(t) = I_p + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.

1. (a) Vérifier la relation : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, E(t+s) = E(t)E(s)$.
   (b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(E(t))^n = E(nt)$.
   (c) Montrer que pour toute $t \in \mathbb{R}$ la matrice $E(t)$ est inversible et expliciter son inverse.
   (d) En déduire finalement que $G = \{E(t)/t \in \mathbb{R}\}$ est un groupe multiplicatif.

2. (a) Montrer que la famille $\{I_p, A, A^2\}$ est libre.
   (b) En déduire que l'application $t \mapsto E(t)$ est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie II : étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

Dans cette partie, on choisit $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme que représente A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ sont deux droites supplémentaires de $\mathbb{R}^2$ dont on donnera des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
5. En déduire qu'il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
6. Expliciter alors A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie III : calcul d'une exponentielle de matrice

On conserve les notations de la partie II. On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $e^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $E_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$.

7. Expliciter $E_n(t)$ sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

8. Pour $t \in \mathbb{R}$, déterminer les limites $n \to +\infty$ de $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$ et $d_n(t)$ notées respectivement $a(t)$, $b(t)$,$c(t)$ et $d(t)$. On note alors $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$.

9. Montrer qu'il existe Q et R dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}, E(t) = e^{2t}Q + e^t R$.

10. (a) Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ. Que dire des endomorphismes que représentent Q et R ?
    (b) En déduire que pour tout t et s réels on a $E(s+t) = E(s)E(t)$.

11. L'application $t \mapsto E(t)$ est-elle injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?