ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 14

Soit k un réel fixé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(kx).$$

1–a)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = k^{a_n} f(k^{b_n} x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_n et b_n en fonction de n.

c) Calculer $f^{(n)}(0)$.

2)

Soit (u_n) une suite de réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

a) si $\ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument.

b) si $\ell > 1$, la série de terme général u_n est divergente.

3)

Soit g_k la fonction définie par : $g_k(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} k^{a_n} \times \frac{x^n}{n!}$.

a) Déterminer le domaine de définition de g_1.

b) Déterminer, selon les valeurs de k, le domaine de définition de g_k.

4)

On suppose désormais que $|k| \leq 1$. Soit $a > 0$ un réel fixé.

a) Montrer qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in [-a, a],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leq M$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on pose $R_N(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} k^{a_n} \frac{x^n}{n!}$.

Déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N(x)$.

c) Montrer que g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_k'(x) = g_k(kx)$$