ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 14

Soit k un réel fixé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(kx).$$

1–a)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = k^{a_n} f(k^{b_n} x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_n et b_n en fonction de n.

c) Calculer $f^{(n)}(0)$.

2)

Soit (u_n) une suite de réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

a) si $\ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument.

b) si $\ell > 1$, la série de terme général u_n est divergente.

3)

Soit g_k la fonction définie par : $g_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} k^{a_n} \times \dfrac{x^n}{n!}$.

a) Déterminer le domaine de définition de g_1.

b) Déterminer, selon les valeurs de k, le domaine de définition de g_k.

4)

On suppose désormais que $|k| \leq 1$. Soit $a > 0$ un réel fixé.

a) Montrer qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in [-a, a],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leq M$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on pose $R_N(x) = f(x) - \sum\limits_{n=0}^{N-1} k^{a_n} \dfrac{x^n}{n!}$.

Déterminer $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N(x)$.

c) Montrer que g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_k'(x) = g_k(kx)$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.