



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 13

1) _____

Pour tout réel x on pose $\varphi(x) = \int_1^e \frac{\ln t}{1+x^2 t^2} dt$.

Montrer que φ est définie sur \mathbb{R} , à valeurs strictement positives et paire.

2-a) _____

Prouver que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq |x^2 - x_0^2| \int_1^e t^2 \ln t dt$$

b) En déduire la continuité de φ sur \mathbb{R} .

3-a) _____

Prouver que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

b) Démontrer que φ est dérivable sur \mathbb{R}^* .

4) _____

Etudier la monotonie de φ sur \mathbb{R}_+ .

5-a) _____

Calculer $\int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \varphi(x)$ et donner un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$.