ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 12

1–a)

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, l'intégrale $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}}$ converge et calculer alors sa valeur notée $I(x)$.

b) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que l'intégrale $\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$ converge pour tout $x \in [0,1[$ et déterminer $\lim_{x\to 1^-} \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$.

On note alors $T(f)$ la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$T(f)(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt, \text{ si } 0 \leq x < 1 \text{ et } T(f) \text{ continue en } 1$$

2–a)

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$T(f)(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du.$$

b) On suppose f de classe C^1 sur $[0,1]$; montrer que la fonction $T(f)$ est continue sur $[0,1]$.

3)

On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$.

a) Donner un équivalent de $T(f)$ au voisinage de 1.

b) Montrer que $T(f)$ n'est pas dérivable en $x = 1$.

4–a)

Déterminer une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, on a :

$$\sup_{x\in[0,1]} |T(f)(x)| \leq C \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

b) Déterminer la plus petite constante C vérifiant l'inégalité précédente.