



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## ANALYSE ENONCE NUMERO 12

1-a)

Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$ , l'intégrale  $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}}$  converge et calculer alors sa valeur notée  $I(x)$ .

b) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ . Montrer que l'intégrale  $\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$  converge pour tout  $x \in [0, 1[$  et déterminer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$ .

On note alors  $T(f)$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par

$$T(f)(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt, \text{ si } 0 \leq x < 1 \text{ et } T(f) \text{ continue en } 1$$

2-a)

Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a

$$T(f)(x) = \sqrt{1-x} \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}} du.$$

b) On suppose  $f$  de classe  $C^1$  sur  $[0, 1]$  ; montrer que la fonction  $T(f)$  est continue sur  $[0, 1]$ .

3)

On suppose dans cette question que  $f(1) \neq 0$ .

a) Donner un équivalent de  $T(f)$  au voisinage de 1.

b) Montrer que  $T(f)$  n'est pas dérivable en  $x = 1$ .

4-a)

Déterminer une constante  $C > 0$  telle que pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, 1]$ , on a :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |T(f)(x)| \leq C \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

b) Déterminer la plus petite constante  $C$  vérifiant l'inégalité précédente.