ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie comme suit :

$$f_n \ :]n, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$$

1)

Soit A un réel fixé strictement positif. Montrer que pour tout entier n l'équation $f_n(x) = A$ admet une unique solution que l'on notera x_n.

2)

Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.

3–a)

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(n+1)$.

En déduire qu'il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geq n_1, \ x_n > n+1$.

b) Plus généralement, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang n_k tel que $\forall n \geq n_k, \ x_n > n+k$.

4)

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq n_1$,

$$\int_{x_n - n}^{x_n + 1} \frac{dt}{t} \leq A \leq \int_{x_n - n - 1}^{x_n} \frac{dt}{t}$$

5–a)

Montrer que la suite $(\frac{x_n}{n})_{n \geq 1}$ est convergente et exprimer sa limite en fonction de A.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{x_n}$.