ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application f_n définie comme suit :

$$f_n \ :]n, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$$

1)

Soit A un réel fixé strictement positif. Montrer que pour tout entier n l'équation $f_n(x) = A$ admet une unique solution que l'on notera x_n.

2)

Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$.

3–a)

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(n+1)$.

En déduire qu'il existe un entier n_1 tel que $\forall n \geq n_1, \ x_n > n+1$.

b) Plus généralement, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un rang n_k tel que $\forall n \geq n_k, \ x_n > n+k$.

4)

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq n_1$,

$$\int_{x_n-n}^{x_n+1} \frac{dt}{t} \leq A \leq \int_{x_n-n-1}^{x_n} \frac{dt}{t}$$

5–a)

Montrer que la suite $(\frac{x_n}{n})_{n\geq 1}$ est convergente et exprimer sa limite en fonction de A.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{x_n}$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.