



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## ANALYSE ENONCE NUMERO 10

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'application  $f_n$  définie comme suit :

$$f_n : ]n, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{1}{x-k}$$

1) \_\_\_\_\_

Soit  $A$  un réel fixé strictement positif. Montrer que pour tout entier  $n$  l'équation  $f_n(x) = A$  admet une unique solution que l'on notera  $x_n$ .

2) \_\_\_\_\_

Déterminer la limite de la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ .

3-a) \_\_\_\_\_

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(n+1)$ .

En déduire qu'il existe un entier  $n_1$  tel que  $\forall n \geq n_1, x_n > n+1$ .

b) Plus généralement, montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , il existe un rang  $n_k$  tel que  $\forall n \geq n_k, x_n > n+k$ .

4) \_\_\_\_\_

Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq n_1$ ,

$$\int_{x_n-n}^{x_n+1} \frac{dt}{t} \leq A \leq \int_{x_n-n-1}^{x_n} \frac{dt}{t}$$

5-a) \_\_\_\_\_

Montrer que la suite  $(\frac{x_n}{n})_{n \geq 1}$  est convergente et exprimer sa limite en fonction de  $A$ .

b) Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{1}{x_n}$ .