



ORAL DE MATHÉMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 8

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit a_1, \dots, a_n des réels non nuls. On considère les ensembles suivants :

$$\mathcal{E} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\}$$

ainsi que

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$$

et

$$\mathcal{E}_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} < 1\}$$

1-a) _____

Montrer que \mathcal{E} est une partie fermée et bornée de \mathbb{R}^n telle que $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \frac{1}{2}(x+y) \in \mathcal{E}$.

b) Montrer que \mathcal{E}_0 est un ouvert de \mathbb{R}^n et que S est un fermé borné de \mathbb{R}^n .

2) _____

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \notin \mathcal{E}$. On considère la fonction f définie que \mathcal{E} par :

$f(z) = \|z - x\|^2$ où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

a) Montrer que $\inf_{z \in \mathcal{E}} f(z)$ existe et est atteint en un ou plusieurs points de \mathcal{E} .

b) Soit z_0 un point de \mathcal{E} où f atteint son minimum. En calculant le gradient de f , montrer que $z_0 \in S$.

c) Montrer que $\inf_{z \in \mathcal{E}} f(z)$ est atteint en un unique point. On le note x^* .

3-a) _____

Montrer que le point $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ est défini par :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i^* = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda} \quad (\star)$$

b) Montrer que l'on peut supposer $\lambda > 0$.

c) En étudiant la fonction φ définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + t)^2} - 1$$

montrer qu'il existe un unique λ vérifiant (\star) .

4) _____

On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = 1$. Déterminer le point x^* ainsi que $f(x^*)$.