ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 8

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels non nuls. On considère les ensembles suivants :

$$\mathcal{E} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\}$$

ainsi que

$$S = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$$

et

$$\mathcal{E}_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} < 1\}$$

1–a)

Montrer que $\mathcal{E}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall (x,y) \in \mathcal{E}^2, \ \frac{1}{2}(x+y) \in \mathcal{E}$.

b) Montrer que $\mathcal{E}_0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que S est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

2)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \notin \mathcal{E}$. On considère la fonction f définie que $\mathcal{E}$ par :

$f(z) = ||z - x||^2$ où $||.||$ représente la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\inf\limits_{z \in \mathcal{E}} f(z)$ existe et est atteint en un ou plusieurs points de $\mathcal{E}$.

b) Soit z_0 un point de $\mathcal{E}$ où f atteint son minimum. En calculant le gradient de f, montrer que $z_0 \in S$.

c) Montrer que $\inf\limits_{z \in \mathcal{E}} f(z)$ est atteint en un unique point. On le note x^*.

3–a)

Montrer que le point $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ est défini par :

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i^* = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda} \qquad (\star)$$

b) Montrer que l'on peut supposer $\lambda > 0$.

c) En étudiant la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + t)^2} - 1$$

montrer qu'il existe un unique λ vérifiant $(\star)$.

4)

On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \ a_i = 1$. Déterminer le point x^* ainsi que $f(x^*)$.

 Jean MALLET