ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 8

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels non nuls. On considère les ensembles suivants :

$$\mathcal{E} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1\}$$

ainsi que

$$S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$$

et

$$\mathcal{E}_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i^2} < 1\}$$

1–a)

Montrer que $\mathcal{E}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall (x, y) \in \mathcal{E}^2, \ \frac{1}{2}(x+y) \in \mathcal{E}$.

b) Montrer que $\mathcal{E}_0$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que S est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

2)

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \notin \mathcal{E}$. On considère la fonction f définie que $\mathcal{E}$ par :
$f(z) = ||z - x||^2$ où $||.||$ représente la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\inf_{z \in \mathcal{E}} f(z)$ existe et est atteint en un ou plusieurs points de $\mathcal{E}$.

b) Soit z_0 un point de $\mathcal{E}$ où f atteint son minimum. En calculant le gradient de f, montrer que $z_0 \in S$.

c) Montrer que $\inf_{z \in \mathcal{E}} f(z)$ est atteint en un unique point. On le note x^*.

3–a)

Montrer que le point $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ est défini par :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \ / \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i^* = \frac{a_i^2 x_i}{a_i^2 + \lambda} \qquad (\star)$$

b) Montrer que l'on peut supposer $\lambda > 0$.

c) En étudiant la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 x_i^2}{(a_i^2 + t)^2} - 1$$

montrer qu'il existe un unique λ vérifiant $(\star)$.

4)

On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!], \ a_i = 1$. Déterminer le point x^* ainsi que $f(x^*)$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.