ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 13

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n $(n \geq 2)$ à coefficients complexes. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de A.

a) Vérifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda) = 0$.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme annulateur de A, de degré minimum et de coefficient de plus haut degré égal à 1. On note désormais m_A ce polynôme.

Vérifier que $m_A = m_{{}^tA}$ (où ${}^tA$ est la transposée de la matrice A).

c) Soit λ une racine de m_A. En raisonnant par l'absurde, montrer que λ est une valeur propre de A.

c) En déduire que $\sigma(A)$ est exactement l'ensemble des racines de m_A.

d) On considère la matrice $R \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer R^2 et en déduire m_R. Déterminer $\sigma(R)$.

2)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixées. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = AM - BM$$

On suppose que l'intersection de $\sigma(A)$ et de $\sigma(B)$ est vide.

a) Soit $M \in \operatorname{Ker}\Phi$. Montrer que $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) Prouver que la matrice $m_B(A)$ est inversible.

(on pourra écrire $m_B(X)$ sous la forme $m_B(X) = (X - b_1)^{n_1} \dots (X - b_k)^{n_k}$).

c) En déduire que le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$

d) Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que l'équation $AM - MB = Y$ admet une unique solution $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

e) On suppose que A est inversible et que B est nilpotente d'indice $m \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que $B^m = (0)$ et $B^{m-1} \neq (0)$.

Prouver que l'unique solution de l'équation $Y = AM - MB$ est $M = \sum_{j=0}^{m-1} (A^{-1})^{j+1} Y B^j$.

3)

On considère la matrice N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ l'équation $RM - MN = I_4$, d'inconnue M, où R est la matrice définie en 1.e).

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.