ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 13

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geq 2$) à coefficients complexes. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A.

1)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de A.

a) Vérifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda) = 0$.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme annulateur de A, de degré minimum et de coefficient de plus haut degré égal à 1. On note désormais m_A ce polynôme.

Vérifier que $m_A = m_{{}^tA}$ (où ${}^tA$ est la transposée de la matrice A).

c) Soit λ une racine de m_A. En raisonnant par l'absurde, montrer que λ est une valeur propre de A.

c) En déduire que $\sigma(A)$ est exactement l'ensemble des racines de m_A.

d) On considère la matrice $R \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer R^2 et en déduire m_R. Déterminer $\sigma(R)$.

2)

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixées. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = AM - BM$$

On suppose que l'intersection de $\sigma(A)$ et de $\sigma(B)$ est vide.

a) Soit $M \in \operatorname{Ker} \Phi$. Montrer que $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$.

b) Prouver que la matrice $m_B(A)$ est inversible.

(on pourra écrire $m_B(X)$ sous la forme $m_B(X) = (X - b_1)^{n_1} \dots (X - b_k)^{n_k}$).

c) En déduire que le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$

d) Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que l'équation $AM - MB = Y$ admet une unique solution $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

e) On suppose que A est inversible et que B est nilpotente d'indice $m \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que $B^m = (0)$ et $B^{m-1} \neq (0)$.

Prouver que l'unique solution de l'équation $Y = AM - MB$ est $M = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} (A^{-1})^{j+1} Y B^j$.

3)

On considère la matrice N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ donnée par $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Résoudre dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ l'équation $RM - MN = I_4$, d'inconnue M, où R est la matrice définie en 1.e).