ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 12

Soit un entier naturel $n \geq 2$ et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit f un endomorphisme de E, non nul, nilpotent, ce qui signifie qu'il existe $p \geq 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1)

Montrer que $p \leq n$.

2)

On suppose dans cette question uniquement que $p = n$. Résoudre l'équation $u^2 = f$, d'inconnue u, endomorphisme de E.

3)

Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4)

Soit g un endomorphisme de E.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q, annulateur de g, dont les racines sont exclusivement les valeurs propres de g.

b) Montrer que dans l'ensemble des polynômes annulateurs (non nuls) de g, il existe un polynôme de degré minimal. Quel lien existe-t-il entre ce polynôme et Q ?

c) On suppose que g ne possède que 0 comme valeur propre. Montrer que g est nilpotent.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.