



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## ALGEBRE ENONCE NUMERO 12

Soit un entier naturel  $n \geq 2$  et  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ , non nul, nilpotent, ce qui signifie qu'il existe  $p \geq 2$  tel que  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$ .

1) \_\_\_\_\_

Montrer que  $p \leq n$ .

2) \_\_\_\_\_

On suppose dans cette question uniquement que  $p = n$ . Résoudre l'équation  $u^2 = f$ , d'inconnue  $u$ , endomorphisme de  $E$ .

3) \_\_\_\_\_

Déterminer les valeurs propres de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

4) \_\_\_\_\_

Soit  $g$  un endomorphisme de  $E$ .

a) Montrer qu'il existe un polynôme  $Q$ , annulateur de  $g$ , dont les racines sont exclusivement les valeurs propres de  $g$ .

b) Montrer que dans l'ensemble des polynômes annulateurs (non nuls) de  $g$ , il existe un polynôme de degré minimal. Quel lien existe-t-il entre ce polynôme et  $Q$  ?

c) On suppose que  $g$  ne possède que 0 comme valeur propre. Montrer que  $g$  est nilpotent.