ORAL DE MATHEMATIQUES

**HEC ESCP**

**ALGEBRE ENONCE NUMERO 11**

Dans cet exercice, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à $A$ dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

**1)**

Montrer que $u$ est diagonalisable.

**2)**

Dans cette question $n$ est pair et on écrit $n = 2p$.

**a)** Montrer qu'il existe des plans vectoriels $F_1, \dots, F_p$, stables par $u$, tels que l'on ait $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = \mathbb{R}^n$.

**b)** En déduire les valeurs propres de $u$ ainsi qu'une base orthonormée de vecteurs propres de $u$.

**3)**

Dans cette question, $n$ est impair et on écrit $n = 2p+1$. Déterminer les éléments propres de $u$.

**4)**

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable.

**5)**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

A quelles conditions la matrice $A$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ ?