ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 10

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit (u, v) une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, U et V les matrices colonnes canoniquement associées à u et v et α un réel non nul.

I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1)

On considère la matrice $A = I_n + \alpha U {}^t U$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Soit Q une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ses valeurs propres réelles, s'il y en a, appartiennent à $\{-1, 1\}$.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle orthogonale ?

2)

Dans cette question, on considère la matrice $B = I_n + U {}^t V + V {}^t U$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

a) Montrer qu'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ de matrice colonne canoniquement associée X est vecteur propre de g associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$(\lambda - 1)x = \langle x, u\rangle v + \langle x, v\rangle u \text{ où } \langle ., .\rangle \text{ est le produit scalaire canonique de } \mathbb{R}^n.$$

b) En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.