ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension n. Soit s un endomorphisme de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

(ii) $s \neq \mathrm{Id}_E$.

(iii) $s \neq -\mathrm{Id}_E$.

On considère l'application φ définie sur $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E),\ \varphi(f) = \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$$

1)

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2)

Montrer que s est diagonalisable et que son spectre est égal à $\{-1, 1\}$.

On notera dans la suite E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

3)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \operatorname{Ker} \varphi \Longleftrightarrow f(E_1) \subset E_{-1} \text{ et } f(E_{-1}) \subset E_1$$

4)

Soit λ une valeur propre de φ et soit f un vecteur propre associé.

Pour $x \in E_1$, déterminer une relation entre $f(x)$ et $s(f(x))$. Même question pour $x \in E_{-1}$.

5)

Montrer que le spectre de φ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$

6)

Déterminer un polynôme P annulateur de φ de coefficient dominant égal à 1 et de degré 3.