ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 8

1)

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ à coefficients complexes.

Si $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la matrice adjointe $A^* = (b_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de A par :

$$\forall (k,\ell) \in ([\![1,n]\!])^2, \; b_{k,\ell} = \overline{a_{\ell,k}}$$

1)

Soit A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Vérifier que $(A^*)^* = A$.

b) Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.

c) Montrer que pour tous complexes α et β, $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.

On dit que A est autoadjointe si $A = A^*$. On dit que A est normale si $AA^* = A^*A$.

d) Donner un exemple de matrice autoadjointe.

2–a)

Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $A = X + iY$ où X et Y sont deux matrices autoadjointes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En déduire que A est normale si et seulement si X et Y commutent.

b) La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ? Que remarquez-vous ?

c) La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ 2-i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ?

3)

On considère l'application Φ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \; \Phi(M) = \mathrm{tr}\,(M^*.M)$$

a) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(M) \in \mathbb{R}$ et $\Phi(M) = 0 \iff M = (0)$

b) Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\Phi(AX - XA) = \Phi(A^*X - XA^*)$.

On rappelle que si $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\mathrm{tr}\,(M_1M_2) = \mathrm{tr}\,(M_2M_1)$.

c) En déduire que si une matrice M commute avec une matrice normale A, elle commute aussi avec l'adjointe de A.