ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 8

1)

On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ à coefficients complexes.

Si $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la matrice adjointe $A^* = (b_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de A par :

$$\forall (k,\ell) \in (\llbracket 1, n \rrbracket)^2,\ b_{k,\ell} = \overline{a_{\ell,k}}$$

1)

Soit A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Vérifier que $(A^*)^* = A$.

b) Montrer que $(AB)^* = B^*A^*$.

c) Montrer que pour tous complexes α et β, $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$.

On dit que A est autoadjointe si $A = A^*$. On dit que A est normale si $AA^* = A^*A$.

d) Donner un exemple de matrice autoadjointe.

2–a)

Montrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $A = X + iY$ où X et Y sont deux matrices autoadjointes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En déduire que A est normale si et seulement si X et Y commutent.

b) La matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ? Que remarquez-vous ?

c) La matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ 2-i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle normale ?

3)

On considère l'application Φ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = \mathrm{tr}\,(M^*.M)$$

a) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\Phi(M) \in \mathbb{R}$ et $\Phi(M) = 0 \Longleftrightarrow M = (0)$

b) Soit A une matrice normale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\Phi(AX - XA) = \Phi(A^*X - XA^*)$.

On rappelle que si $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\mathrm{tr}\,(M_1M_2) = \mathrm{tr}\,(M_2M_1)$.

c) En déduire que si une matrice M commute avec une matrice normale A, elle commute aussi avec l'adjointe de A.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.