



## ORAL DE MATHÉMATIQUES

HEC ESCP

## ALGÈBRE ENONCE NUMERO 8

1) \_\_\_\_\_

On considère l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  des matrices carrées d'ordre  $n \geq 2$  à coefficients complexes.

Si  $A = (a_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on définit la matrice adjointe  $A^* = (b_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de  $A$  par :

$$\forall (k, \ell) \in ([1, n])^2, b_{k,\ell} = \overline{a_{\ell,k}}$$

1) \_\_\_\_\_

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices appartenant à  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

a) Vérifier que  $(A^*)^* = A$ .

b) Montrer que  $(AB)^* = B^*A^*$ .

c) Montrer que pour tous complexes  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$ .

*On dit que  $A$  est autoadjointe si  $A = A^*$ . On dit que  $A$  est normale si  $AA^* = A^*A$ .*

d) Donner un exemple de matrice autoadjointe.

2-a) \_\_\_\_\_

Montrer que toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  peut s'écrire de façon unique sous la forme  $A = X + iY$  où  $X$  et  $Y$  sont deux matrices autoadjointes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

En déduire que  $A$  est normale si et seulement si  $X$  et  $Y$  commutent.

b) La matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  donnée par  $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  est-elle normale ? Que remarquez-vous ?

c) La matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  donnée par  $A = \begin{pmatrix} i & 2-i & 1 \\ 2-i & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  est-elle normale ?

3) \_\_\_\_\_

On considère l'application  $\Phi$  définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \Phi(M) = \text{tr}(M^* \cdot M)$$

a) Montrer que, pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\Phi(M) \in \mathbb{R}$  et  $\Phi(M) = 0 \iff M = (0)$

b) Soit  $A$  une matrice normale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $X$  une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .  
Montrer que  $\Phi(AX - XA) = \Phi(A^*X - XA^*)$ .

On rappelle que si  $(M_1, M_2) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ ,  $\text{tr}(M_1M_2) = \text{tr}(M_2M_1)$ .

c) En déduire que si une matrice  $M$  commute avec une matrice normale  $A$ , elle commute aussi avec l'adjointe de  $A$ .