



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## PROBABILITE ENONCE NUMERO 10

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.

On définit une suite de variables aléatoires  $(Y_n)_{n \geq 1}$  par

$$Y_1 = X_1 \text{ et pour tout entier } n \geq 1, Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}$$

1) \_\_\_\_\_

Quelle est la loi de  $\frac{1}{n} X_n$  ?

2-a) \_\_\_\_\_

Déterminer une densité  $f_2$  de  $Y_2$ .

b) Les variables  $Y_n$  et  $\frac{1}{n+1} X_{n+1}$  sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer une densité de la variable  $Y_n$ .

3) \_\_\_\_\_

En déduire que  $Y_n$  et  $Z_n = \sup (X_1, X_2, \dots, X_n)$  suivent la même loi.

4) \_\_\_\_\_

Déterminer la limite en probabilité de la suite  $(\frac{Y_n}{n})_{n \geq 1}$ .