



ORAL DE MATHÉMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITÉ ENONCE NUMERO 8

On dispose de n variables aléatoires indépendantes ($n \geq 2$), notées X_1, \dots, X_n de même loi de Poisson de paramètre θ inconnu ($\theta \in]0, +\infty[$) et définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On souhaite exprimer $\exp(-\theta)$.

On définit pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire Y_i par :

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

On pose $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

1) _____

- a) Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donner la loi de Y_i .
 b) Quelle est la loi de $n\bar{Y}_n$? Que vaut l'espérance de \bar{Y}_n ?
 c) Calculer la variance $\text{Var}(\bar{Y}_n)$. Conclusion ?

2) _____

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

- a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, rappeler la loi de S_k .

Pour tout entier naturel j , on pose $\varphi(j) = P_{(S_n=j)}(X_1 = 0)$.

- b) Montrer que pour tout entier naturel j on a : $\varphi(j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^j$.

On peut ainsi définir l'estimateur $\varphi(S_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$.

- c) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $E(\varphi(S_n)) = \exp(-\theta)$.
 d) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance et que

$$\text{Var}(\varphi(S_n)) = \exp(-2\theta) \left(\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) - 1 \right).$$

Conclusion ?

3) _____

On souhaite ici comparer les « performances » de \bar{Y}_n et $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateur de $\exp(-\theta)$.

- a) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp\left(\frac{\theta}{n}\right) \leq \frac{\exp(\theta)}{n} + \frac{n-1}{n}$.

Montrer que : $\text{Var}(\varphi(S_n)) \leq \text{Var}(\bar{Y}_n)$.

- b) Comparer les risques quadratiques de \bar{Y}_n et $\varphi(S_n)$.