ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 8

On dispose de n variables aléatoires indépendantes $(n \geq 2)$, notées $X_1 \dots, X_n$ de même loi de Poisson de paramètre θ inconnu $(\theta \in]0, +\infty[)$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On souhaite exprimer $\exp(-\theta)$.

On définit pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la variable aléatoire Y_i par :

$$Y_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i(\omega) = 0 \\ 0 & \text{si } X_i(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

On pose $\overline{Y_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1)

a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, donner la loi de Y_i.

b) Quelle est la loi de $n\overline{Y_n}$? Que vaut l'espérance de $\overline{Y_n}$?

c) Calculer la variance $\mathrm{Var}\,(\overline{Y_n})$. Conclusion ?

2)

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, rappeler la loi de S_k.

Pour tout entier naturel j, on pose $\varphi(j) = P_{(S_n=j)}(X_1 = 0)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel j on a : $\varphi(j) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^j$.

On peut ainsi définir l'estimateur $\varphi(S_n) = (1 - \dfrac{1}{n})^{S_n}$.

c) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une espérance et que $E(\varphi(S_n)) = \exp(-\theta)$.

d) Montrer que $\varphi(S_n)$ admet une variance et que

$$\mathrm{Var}\,(\varphi(S_n)) = \exp(-2\theta)\Big(\exp(\frac{\theta}{n}) - 1\Big).$$

Conclusion ?

3)

On souhaite ici comparer les ≪ performances ≫ de $\overline{Y_n}$ et $\varphi(S_n)$ en tant qu'estimateur de $\exp(-\theta)$.

a) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\exp(\dfrac{\theta}{n}) \leq \dfrac{\exp(\theta)}{n} + \dfrac{n-1}{n}$.

Montrer que : $\mathrm{Var}\,(\varphi(S_n)) \leq \mathrm{Var}\,(\overline{Y_n})$.

b) Comparer les risques quadratiques de $(\overline{Y_n})$ et $\varphi(S_n)$.