ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 7

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

A toute suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ dont les propriétés varieront en fonction des questions, on associe la suite de variables alatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ définies pour tout entier naturel non nul n par $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

1)

Dans cette question, $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer la loi de Y_n.

b) Les variables Y_{n+1} et Y_n sont-elles indépendantes ?

c) Montrer que la suite $(Y_m)_{m\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

2)

Dans cette question, $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi définie par : $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = -1) = 1 - p$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Déterminer l'espérance de Y_n.

c) Déterminer la loi de Y_n.

d) Les variables Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes?

e) Montrer que la suite $(Y_m)_{m\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

3)

On note X_0 la variable aléatoire certaine égale à 1 et $(Z_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout entier n non nul, on pose $X_n = Z_n X_{n-1}$ et on définit comme précédemment $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Les variables X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

b) Déterminer les lois de X_n et de Y_n.

c) Montrer que la suite $(Y_m)_{m\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.