ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 6

1)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi normale centrée réduite. Soit $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable à densité dont on donnera une densité.

b) Montrer que Y admet une espérance et une variance et déterminer ces deux moments.

c) Quelle est la loi de $\frac{1}{2}Y^2$.

2)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que f est un projecteur orthogonal dont on précisera les éléments caractérisques.

3)

Un point M, extrémité d'un vecteur V, est placé de manière aléatoire dans l'espace $\mathbb{R}^3$, rapporté à un repère orthonormé.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique (on note $||.||$ la norme associée).

On suppose que les coordonnées (X, Y, Z) de M sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune la loi normale centrée réduite.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}||V||^2 = \frac{1}{2}||\overrightarrow{OM}||^2$.

b) Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 0$. On note D la variable aléatoire égale à la distance de M au plan $\mathcal{P}$.

Montrer que D est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.

c) Quelle est la distance moyenne de M au plan $\mathcal{P}$?

