ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 5

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On y effectue une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si à un rang quelconque on obtient une boule blanche, on la remplace par une boule noire avant le tirage suivant ;
- si à un rang quelconque on tire une boule noire, on la remplace par une boule noire avec la probabilité p ou on la remplace par une boule blanche avec la probabilité $q = 1 - p$ (on suppose que $0 < p < 1$) et on effectue alors le tirage suivant.

L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire juste avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage).

1)

Donner la loi de X_1.

2)

a) Donner les valeurs prises par la variable X_n.

b) Déterminer pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $(X_n = j)$ est réalisé.

3)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$.

b) Vérifier que 1, $-q$, $\frac{p}{2}$ sont valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres de A.

c) En déduire que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.