ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 5

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On y effectue une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si à un rang quelconque on obtient une boule blanche, on la remplace par une boule noire avant le tirage suivant ;
- si à un rang quelconque on tire une boule noire, on la remplace par une boule noire avec la probabilité p ou on la remplace par une boule blanche avec la probabilité $q = 1 - p$ (on suppose que $0 < p < 1$) et on effectue alors le tirage suivant.

L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage (c'est-à-dire juste avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage).

1)

Donner la loi de X_1.

2)

a) Donner les valeurs prises par la variable X_n.

b) Déterminer pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant que $(X_n = j)$ est réalisé.

3)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = AU_n$.

b) Vérifier que 1, $-q$, $\frac{p}{2}$ sont valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres de A.

c) En déduire que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi.

Jean MALLET