



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## PROBABILITE ENONCE NUMERO 5

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On y effectue une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si à un rang quelconque on obtient une boule blanche, on la remplace par une boule noire avant le tirage suivant ;
- si à un rang quelconque on tire une boule noire, on la remplace par une boule noire avec la probabilité  $p$  ou on la remplace par une boule blanche avec la probabilité  $q = 1 - p$  (on suppose que  $0 < p < 1$ ) et on effectue alors le tirage suivant.

L'expérience est modélisée dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules noires contenues dans l'urne à l'issue du  $n^{\text{ème}}$  tirage (c'est-à-dire juste avant le  $(n + 1)^{\text{ème}}$  tirage).

1) \_\_\_\_\_

Donner la loi de  $X_1$ .

2) \_\_\_\_\_

a) Donner les valeurs prises par la variable  $X_n$ .

b) Déterminer pour tout  $j \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ , la loi conditionnelle de  $X_{n+1}$  sachant que  $(X_n = j)$  est réalisé.

3) \_\_\_\_\_

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ .

a) Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_{n+1} = AU_n$ .

b) Vérifier que  $1, -q, \frac{p}{2}$  sont valeurs propres de  $A$  et déterminer les sous-espaces propres de  $A$ .

c) En déduire que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi.