ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITE ENONCE NUMERO 4

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f continue sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

On suppose également que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ converge.

1)

Montrer que pour tout $x \geq 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge. On pose alors

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2)

Montrer que la fonction h est une densité de probabilité.

3)

Soit U une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante de X et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = XU$ et $Z = X - Y$.

a) Déterminer les lois respectives de $\ln X$ et de $\ln U$.

b) Déterminer la loi de Y et celle de Z.