



ORAL DE MATHÉMATIQUES

HEC ESCP

PROBABILITÉ ENONCE NUMERO 2

1) _____

On admet que $\forall x \in [0, 1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Calculer, pour $x \in [0, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , mutuellement indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.

2) _____

Dans cette question m désigne un entier naturel non nul fixé. Pour tout $\omega \in \Omega$, on range les nombres $X_0(\omega), X_1(\omega), \dots, X_m(\omega)$ par ordre *décroissant* pour obtenir une nouvelle séquence notée $Y_0(\omega), Y_1(\omega), \dots, Y_m(\omega)$. Ainsi, en particulier,

$$Y_0(\omega) = \sup\{X_k(\omega), 0 \leq k \leq m\} \text{ et } Y_m(\omega) = \inf\{X_k(\omega), 0 \leq k \leq m\}$$

a) Déterminer la fonction de répartition Φ_0 et une densité φ_0 de Y_0 .

a) Déterminer la fonction de répartition Φ_m et une densité φ_m de Y_m .

3) _____

Soit X et Y deux variables aléatoires à densité définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , indépendantes, de densités respectives f et g , de fonctions de répartition respectives F et G .

a) Déterminer une densité de $-Y$.

b) On admet que si $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables, on a

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x, t) dt \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} h(x, t) dx \right] dt,$$

sous réserve que toutes les intégrales écrites convergent.

Montrer que $P(Y \leq X) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)dx$.

4) _____

a) On considère la variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{N} définie par : $\forall \omega \in \Omega$,

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \text{le plus petit des indices } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_0(\omega), & \text{si ce nombre existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de N et vérifier que $P(N = 0) = 0$. La variable aléatoire N admet-elle une espérance ?

b) Déterminer la fonction de répartition Ψ et une densité ψ de X_N .

c) Montrer que X_N admet une espérance et déterminer sa valeur.

CORRIGE EXO DE PROBABILITE NUMERO 2
1)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$\forall x \in [0, 1[$, $\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Les deux séries sont convergentes donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{x^j}{j} \\ &= -x \ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, 1[, \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x) \ln(1-x) + x$$

2)
a)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \Phi_0(x) &= P\left(\sup_{0 \leq k \leq m} X_k \leq x\right) \\ &= P\left(\bigcap_{k=0}^m (X_k \leq x)\right) = \prod_{k=0}^m P(X_k \leq x) \quad \text{par indépendance des variables} \\ &= P(X_1 \leq x)^{m+1} \quad \text{car les variables suivent la même loi.} \end{aligned}$$

- Si $x < 0$, $P(X_1 \leq x) = 0$, donc $\Phi_0(x) = 0$.
- Si $x \geq 0$, $P(X_1 \leq x) = 1 - e^{-\alpha x}$ d'après la loi exponentielle de paramètre α , donc

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\alpha x})^{m+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On pourra prendre comme densité φ_0 de Y_0 :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (m+1)\alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\alpha x})^m & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \Phi_m(x) &= P\left(\inf_{0 \leq k \leq m} X_k \leq x\right) \\ &= 1 - P\left(\inf_{0 \leq k \leq m} X_k > x\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{k=0}^m X_k > x\right) = 1 - \prod_{k=0}^m P(X_k > x) \\ &= 1 - \left(P(X_1 > x)\right)^{m+1} \quad \text{arguments déjà donnés} \end{aligned}$$

$$\Phi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha(m+1)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{car } P(X_1 > x) = 1$$

Y_m suit la loi exponentielle de paramètre $(m+1)\alpha$

3)
a)

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - F_Y(-x)$ car Y est une variable à densité.

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{-Y}(x) = 1 - F_Y(-x).$$