ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 7

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[0,1]$. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction moyenne $T(f)$ associée à f par :

$$T(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1–a)

Montrer que $T : \mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E.

b) T est-il injectif ? surjectif ?

2)

Soit f et g deux fonctions appartenant à E. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ F(x) = x\int_0^x f(t)g(t)dt - \Big(\int_0^x f(t)dt\Big)\Big(\int_0^x g(t)dt\Big)$$

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une seule intégrale.

b) On suppose que f et g sont croissantes. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ T(fg)(x) \geq T(f)(x)T(g)(x)$$

c) Que peut-on dire si les deux fonctions f et g sont supposées décroissantes.

d) Quelle inégalité obtient-on si l'une des fonctions est croissante et l'autre décroissante ?

3)

Soit $f \in E$. On lui associe la fonction $\tilde{f}$ en posant $\tilde{f}(x) = \max\limits_{t\in[0,x]} f(t)$

a) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie sur $[0,1]$ et croissante.

b) Soit x et y deux éléments de $[0,1]$ tels que $x < y$. Montrer que

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \max_{(t,s)\in[x,y]^2} |f(t) - f(s)|$$

En déduire que $\tilde{f}$ est continue sur $[0,1]$.

c) Etablir l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)dt \geq \Big(\int_0^1 \tilde{f}(t)dt\Big)\Big(\int_0^1 \tilde{g}(t)dt\Big)$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.