ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 7

On considère l'espace vectoriel E des fonctions continues sur $[0,1]$. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction moyenne $T(f)$ associée à f par :

$$T(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } x \in]0,1] \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1–a)

Montrer que $T\ :\mapsto T(f)$ est un endomorphisme de E.

b) T est-il injectif ? surjectif ?

2)

Soit f et g deux fonctions appartenant à E. On considère la fonction F définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ \ F(x) = x\int_0^x f(t)g(t)dt - \Big(\int_0^x f(t)dt\Big)\Big(\int_0^x g(t)dt\Big)$$

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une seule intégrale.

b) On suppose que f et g sont croissantes. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ \ T(fg)(x) \geq T(f)(x)T(g)(x)$$

c) Que peut-on dire si les deux fonctions f et g sont supposées décroissantes.

d) Quelle inégalité obtient-on si l'une des fonctions est croissante et l'autre décroissante ?

3)

Soit $f \in E$. On lui associe la fonction $\tilde{f}$ en posant $\tilde{f}(x) = \max\limits_{t\in[0,x]} f(t)$

a) Montrer que $\tilde{f}$ est bien définie sur $[0,1]$ et croissante.

b) Soit x et y deux éléments de $[0,1]$ tels que $x < y$. Montrer que

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq \max_{(t,s)\in[x,y]^2} |f(t) - f(s)|$$

En déduire que $\tilde{f}$ est continue sur $[0,1]$.

c) Etablir l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)dt \geq \Big(\int_0^1 \tilde{f}(t)dt\Big)\Big(\int_0^1 \tilde{g}(t)dt\Big)$$