ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 6

1–a)

Pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

b) Pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} dt$

c) Etudier la monotonie des fonctions f et g.

2–a)

Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt - \ln x + f(1)$$

b) Montrer qu'il existe un réel k_1 tel que l'on a, au voisinage de 0 :

$$f(x) = -\ln x + k_1 + o(1)$$

3–a)

Montrer que :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{u} du \text{ et } g(x) = f(x) + \int_1^{+\infty} e^{-tx}\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t}\Big) dt$$

b) Montrer que pour tout $x > 0,\ g(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}} du$.

4–a)

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que : $0 < \dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}} \leq \dfrac{b-a}{2a^{\frac{3}{2}}}$.

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, :

$$0 \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2xu}} - g(x) \leq \frac{e^{-x}}{2(2x)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du$$

CORRIGE EXO D'ANALYSE NUMERO 6

1–a)

$*$ Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue positive sur $[x,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ est impropre uniquement en $+\infty$. Pour $t\geq x>0$, on a : $0<\dfrac{e^{-t}}{t}\leq \dfrac{1}{x}e^{-t}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$ converge (voir la loi exponentielle de paramètre 1), donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-t}dt$ converge. Par comparaison des fonctions continues, positives, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ converge.

$$\text{Pour } x>0,\ \text{ l'intégrale } \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \text{ converge.}$$

$*$ Soit $x\leq 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

Etude en 0 : $\dfrac{e^{-t}}{t}\underset{(0)}{\sim}\dfrac{1}{t}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t}$ diverge de manière évidente (fonction de référence). Par équivalence des fonctions continues positives sur $]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t}}{t}dt$ diverge et par suite l'intégrale $\displaystyle\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}dt$ diverge puisque $0\in[x,1]$

$$\text{Pour } x\leq 0, \text{ l'intégrale } \int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \text{ diverge.}$$

En conclusion : $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt \text{ converge si et seulement si } x>0}$

b) La fonction $h : t\mapsto \dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue positive sur $]1,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}dt$ est impropre uniquement en 1 et en $+\infty$.

$*$ En 1.

$\sqrt{t^2-1}=\sqrt{(t+1)(t-1)}=\sqrt{t+1}\sqrt{t-1}\underset{(1)}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{t-1}$. De plus $e^{-tx}\underset{(1)}{\sim}e^{-x}$, donc

$\dfrac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}\underset{(1)}{\sim}\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^2\frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ converge d'après le critère de Riemann (fonction de référence).

Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^2\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}dt$ converge.

$*$ En $+\infty$.

- Si $x<0$.

$t\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}\underset{(+\infty)}{\sim}t\dfrac{e^{-xt}}{t}=e^{-xt}$. Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}t\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}=+\infty$. Par suite,

il existe $A>0$ / $\forall t\geq A$, $t\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}\geq 1$ ce qui équivaut à : $\forall t\geq A$, $\dfrac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}\geq\dfrac{1}{t}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{dt}{t}$ diverge (fonction de référence), donc par comparaison des fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}dt$ diverge.

