



ORAL DE MATHÉMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 6

1-a)

Pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

b) Pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} dt$

c) Etudier la monotonie des fonctions f et g .

2-a)

Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt - \ln x + f(1)$$

b) Montrer qu'il existe un réel k_1 tel que l'on a, au voisinage de 0 :

$$f(x) = -\ln x + k_1 + o(1)$$

3-a)

Montrer que :

$$\forall x > 0, f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{u} du \text{ et } g(x) = f(x) + \int_1^{+\infty} e^{-tx} \left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t} \right) dt$$

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) = e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}} du$.

4-a)

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que : $0 < \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \leq \frac{b-a}{2a^{\frac{3}{2}}}$.

b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, :

$$0 \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2xu}} - g(x) \leq \frac{e^{-x}}{2(2x)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-u} du$$

CORRIGE EXO D'ANALYSE NUMERO 6
1-a)

* Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue positive sur $[x, +\infty[$. L'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est impropre uniquement en $+\infty$. Pour $t \geq x > 0$, on a : $0 < \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{1}{x} e^{-t}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge (voir la loi exponentielle de paramètre 1), donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Par comparaison des fonctions continues, positives, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

Pour $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

* Soit $x \leq 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

Etude en 0 : $\frac{e^{-t}}{t} \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t}$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge de manière évidente (fonction de référence). Par équivalence des fonctions continues positives sur $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge et par suite l'intégrale $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge puisque $0 \in [x, 1]$

Pour $x \leq 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge.

En conclusion : L'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$

b) La fonction $h : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue positive sur $]1, +\infty[$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ est impropre uniquement en 1 et en $+\infty$.

* En 1.

$\sqrt{t^2-1} = \sqrt{(t+1)(t-1)} = \sqrt{t+1}\sqrt{t-1} \underset{(1)}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{t-1}$. De plus $e^{-tx} \underset{(1)}{\sim} e^{-x}$, donc

$$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} \underset{(1)}{\sim} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t-1}}.$$

L'intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ converge d'après le critère de Riemann (fonction de référence).

Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^2 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ converge.

* En $+\infty$.

• Si $x < 0$.

$t \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} \underset{(+\infty)}{\sim} t \frac{e^{-xt}}{t} = e^{-xt}$. Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} t \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} = +\infty$. Par suite,

il existe $A > 0 / \forall t \geq A, t \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} \geq 1$ ce qui équivaut à : $\forall t \geq A, \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} \geq \frac{1}{t}$.

L'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge (fonction de référence), donc par comparaison des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ diverge.