ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 6

1–a)

Pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$.

b) Pour quelles valeurs du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}dt$ est-elle convergente ?

On pose alors $g(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}dt$

c) Etudier la monotonie des fonctions f et g.

2–a)

Montrer que pour tout réel $x>0$, on a :

$$f(x)=\int_x^1\frac{e^{-t}-1}{t}dt-\ln x+f(1)$$

b) Montrer qu'il existe un réel k_1 tel que l'on a, au voisinage de 0 :

$$f(x)=-\ln x+k_1+o(1)$$

3–a)

Montrer que :

$$\forall x>0,\ f(x)=\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xu}}{u}du \text{ et } g(x)=f(x)+\int_1^{+\infty}e^{-tx}\Big(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}-\frac{1}{t}\Big)dt$$

b) Montrer que pour tout $x>0,\ g(x)=e^{-x}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{2xu+u^2}}du$.

4–a)

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$. Montrer que : $0<\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}\leq\dfrac{b-a}{2a^{\frac{3}{2}}}$.

b) Montrer que pour tout réel $x>0,$:

$$0\leq e^{-x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{2xu}}-g(x)\leq\frac{e^{-x}}{2(2x)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{+\infty}\sqrt{u}e^{-u}du$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

CORRIGE EXO D'ANALYSE NUMERO 6

1–a)

∗ Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue positive sur $[x, +\infty[$. L'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est impropre uniquement en $+\infty$. Pour $t \geq x > 0$, on a : $0 < \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{1}{x} e^{-t}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge (voir la loi exponentielle de paramètre 1), donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Par comparaison des fonctions continues, positives, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

$$\text{Pour } x > 0, \text{ l'intégrale } \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ converge.}$$

∗ Soit $x \leq 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

Etude en 0 : $\frac{e^{-t}}{t} \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{t}$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge de manière évidente (fonction de référence). Par équivalence des fonctions continues positives sur $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge et par suite l'intégrale $\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt$ diverge puisque $0 \in [x, 1]$

$$\text{Pour } x \leq 0, \text{ l'intégrale } \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ diverge.}$$

En conclusion : $\boxed{\text{L'intégrale } \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ converge si et seulement si } x > 0}$

b) La fonction $h : t \mapsto \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue positive sur $]1, +\infty[$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ est impropre uniquement en 1 et en $+\infty$.

∗ En 1.

$\sqrt{t^2-1} = \sqrt{(t+1)(t-1)} = \sqrt{t+1}\sqrt{t-1} \underset{(1)}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{t-1}$. De plus $e^{-tx} \underset{(1)}{\sim} e^{-x}$, donc

$\frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} \underset{(1)}{\sim} \frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t-1}}$.

L'intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ converge d'après le critère de Riemann (fonction de référence).

Par équivalence des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_1^2 \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ converge.

∗ En $+\infty$.

- Si $x < 0$.

$t\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} \underset{(+\infty)}{\sim} t\frac{e^{-xt}}{t} = e^{-xt}$. Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} t\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} = +\infty$. Par suite,

il existe $A > 0$ / $\forall t \geq A$, $t\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} \geq 1$ ce qui équivaut à : $\forall t \geq A$, $\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} \geq \frac{1}{t}$.

L'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge (fonction de référence), donc par comparaison des fonctions continues positives, l'intégrale $\int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}} dt$ diverge.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.