ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels non tous nuls. On considère les fonctions f, g, h définies pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ par

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i \ ; \ g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{ et } h(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

1–a)

Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Déterminer son gradient en tout point x de $\mathbb{R}^n$.

b) Prouver que f admet un maximum sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$

c) Déterminer le maximum de f sur S.

d) En déduire que pour tout point $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \prod_{i=1}^{n} u_i \right| \leq \left(\frac{||u||}{\sqrt{n}} \right)^n$$

où $||.||$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

2–a)

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$. On pose

$$H = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ h(x) = 1\} \text{ et } B = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ ||x|| \leq \frac{1}{|a_i|}\}$$

Prouver que l'ensemble $H \cap B$ est non vide puis que c'est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

b) Justifier que la fonction g admet un minimum sur $B \cap H$. Prouver que ce minimum est aussi le minimum de g sous la contrainte $h(x) = 1$.

c) Déterminer le minimum de g sur H.