ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 4

1–a)

Justifier que $\arctan(u) \sim u$ au voisinage de 0.

b) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}dt$ converge.

On note alors sa valeur $F(x)$.

2)

On admet que la fonction F est de classe C^1 sur D et que

$$\forall x \in D,\ F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}\right)dt$$

a) Pour x appartenant à une partie de D à préciser, déterminer deux réels a et b, indépendants de t mais pouvant dépendre de x, tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t^2+1} + \frac{b}{x^2t^2+1}$$

b) Calculer $F'x)$ pour tout $x \in D$.

c) En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D$.

3)

Soit g la fonction $t \mapsto g(t) = \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2$.

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ et en donner sa valeur.