ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 2

1)

Soit x un réel. Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt$ est convergente si et seulement si $x > 0$. On pose alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t}dt$$

L'exercice a pour but l'étude de la fonction F.

2)

Etudier le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$.

3–a)

Démontrer que, pour tout $x > 0$, on a $F(x) \geq \frac{1}{e}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t}dt$. En déduire la limite de F en 0.

b) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}du$.

En déduire la limite de F en $+\infty$.

4)

Prouver que pour tous x_0 et x, réels strictement positifs, on a :

$$\left|F(x) - F(x_0)\right| \leq \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

5)

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}F(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}) = -\frac{1}{2}$.

En déduire que $F(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x} + o(\dfrac{1}{x})$ au voisinage de $+\infty$.

Donner un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

CORRIGE EXO D'ANALYSE NUMERO 2

1)

La fonction $t \mapsto \dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt$ est impropre uniquement en $+\infty$.

- $x \leq 0 \Longrightarrow \exp(-xt^2) \geq 1$ puisque $-xt^2 \geq 0$. Donc en multipliant cette inégalité par $\dfrac{1}{1+t} > 0$, il vient $\dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t} \geq \dfrac{1}{1+t}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}dt$ est divergente sans problème. Par minoration, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt$ est divergente.

- $x > 0$. $t \geq 1 \Longrightarrow t^2 \geq t$, donc $-xt^2 \leq -xt$. Puis par croissance de l'exponentielle, $0 < \exp(-xt^2) \leq \exp(-xt)$.

De plus $0 < \dfrac{1}{1+t} \leq 1$. On multiplie terme à terme ces deux inégalités entre termes positifs et on obtient : $0 < \dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t} \leq \exp(-xt)$. **(1)**

La fonction $t \mapsto x\exp(-xt)$ sur $\mathbb{R}_+$ et 0 ailleurs est une densité de la loi exponentielle de paramètre x. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-xt)dt$ converge.

L'inégalité (1) permet de conclure (par comparaison des fonctions continues positives) que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt$ est convergente.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \text{ converge si et seulement si } x > 0. \text{ La fonction } F \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$$

2)

Soit $0 < x < y$. Alors $-yt^2 \leq -xt^2$ puisque $-t^2 \leq 0$. Par croissance de l'exponentielle, $\exp(-yt^2) \leq \exp(-xt^2)$. On multiplie par $\dfrac{1}{1+t} > 0$, il vient

$\dfrac{\exp(-yt^2)}{1+t} \leq \dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t}$. On intègre entre 0 et $+\infty$, les bornes sont dans l'ordre croissant On obtient donc

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^2),\ x < y \Longrightarrow F(x) \geq F(y) \text{ : la fonction } F \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

3–a)

Puisque $\dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t} > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \geq 0$. Cela veut dire que, par relation de Chasles pour les intégrales convergentes, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \geq 0$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{\exp(-xt^2)}{1+t}dt \qquad \textbf{(3.a)}$$

Dans cette deuxième intégrale, $0 \leq t \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Longrightarrow 0 \leq t^2 \leq \frac{1}{x}$ (par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$), donc $-xt^2 \geq -1$.

Puis par croissance de l'exponentielle, $\exp(-xt^2) \geq \exp(-1) = \frac{1}{e}$.

Multiplions cette inégalité par $\dfrac{1}{1+t} > 0$, il vient $\dfrac{\exp(-xt^2)}{1+t} \geq \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{1+t}$.