ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 1

1)

Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ est convergente.

On pose alors $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$

2)

Montrer que $f(1) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3)

Montrer que f est décroissante sur son domaine de définition.

4–a)

Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^{x+1}}$ est convergente.

On note alors $g(x)$ sa valeur.

4–b)

Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple, que

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t^x(1+t^x)} dt = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$

4–c)

Vérifier que, pour tout $u > 0$, $\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$; en déduire la valeur de $g(x)$.

5–a)

Montrer que, pour $x > 0$, on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln 2}{x}$.

5–b)

Montrer que, pour $x > 0$, on a : $0 \leq \frac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \frac{1}{2x+1}$.

5–c)

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.