ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ANALYSE ENONCE NUMERO 1

1)

Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$ est convergente.

On pose alors $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+t^{x+1}}$

2)

Montrer que $f(1) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

3)

Montrer que f est décroissante sur son domaine de définition.

4–a)

Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^{x+1}}$ est convergente.

On note alors $g(x)$ sa valeur.

4–b)

Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple, que

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t^x(1+t^x)}dt = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)}$$

4–c)

Vérifier que, pour tout $u > 0$, $\dfrac{1}{u(1+u)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{1+u}$; en déduire la valeur de $g(x)$.

5–a)

Montrer que, pour $x > 0$, on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln 2}{x}$.

5–b)

Montrer que, pour $x > 0$, on a : $0 \leq \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leq \dfrac{1}{2x+1}$.

5–c)

Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.