



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## ALGEBRE ENONCE NUMERO 7

1) \_\_\_\_\_

Montrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 t^2 (\ln t - xt - y)^2 dt$$

On note  $\varphi(x, y)$  la valeur de cette intégrale.

2) \_\_\_\_\_

Montrer que les valeurs propres de la matrice  $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$  sont strictement positives.

3-a) \_\_\_\_\_

Montrer que la fonction  $\varphi$  précédemment définie est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et qu'elle admet un point critique  $(x_0, y_0)$  que l'on déterminera.b) Montrer que  $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \{\varphi(x, y)\} = \varphi(x_0, y_0)$ .

4) \_\_\_\_\_

Montrer que l'ensemble  $E$  des fonctions continues sur  $]0, 1]$  telles que l'intégrale  $\int_0^1 t^2 f^2(t) dt$  converge est un espace vectoriel réel et que l'on définit un produit scalaire sur  $E$  en posant :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t) dt$$

5) \_\_\_\_\_

Montrer que si  $X$  est un ensemble non vide et si  $h$  est une application de  $X$  dans  $\mathbb{R}_+$ , alors  $\inf_X (h^2(x)) = (\inf_X (h(x)))^2$ .

En déduire, à l'aide de la question 4), mais indépendamment des résultats de la question 3), comment retrouver que

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} (\varphi(x, y)) = \varphi(x_0, y_0)$$

**CORRIGE EXO D'ALGEBRE NUMERO 7**
**1)**

$$\begin{aligned} t^2(\ln t - xt - y)^2 &= t^2((\ln t)^2 + x^2t^2 + y^2 - 2xt \ln t - 2y \ln t + 2xyt) \\ &= t^2(\ln t)^2 - 2xt^3 \ln t - 2yt^2 \ln t + t^4x^2 + t^2y^2 + 2xyt^3 \end{aligned}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow 0} t^2(\ln t)^2 = \lim_{t \rightarrow 0} t^3 \ln t = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \ln t = 0$ . La fonction

$t \mapsto t^2(\ln t)^2 - 2xt^3 \ln t - 2yt^2 \ln t + t^4x^2 + t^2y^2 + 2xyt^3$  est prolongeable par continuité au point 0. Or, par les théorèmes généraux, cette fonction est continue sur  $]0, 1]$ , l'intégrale  $\int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 dt$  est faussement impropre, donc convergente.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, y) = \int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 dt \text{ existe}$$

**2)**

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}.$$

$\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si le déterminant  $\Delta$  de  $A - \lambda I$  est nul.

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(\frac{2}{5} - \lambda\right)\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) - \frac{1}{4} = \lambda^2 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right)\lambda + \frac{4}{15} - \frac{1}{4} \\ &= \lambda^2 - \frac{16}{15}\lambda + \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut  $\left(\frac{16}{15}\right)^2 - 4 \frac{1}{60} = \frac{256}{225} - \frac{1}{15} > 0$  de manière évidente. Le déterminant admet deux racines distinctes. Leur produit  $\frac{1}{60}$  est  $> 0$ , elles sont de même signe ; leur somme  $\frac{16}{15}$  est  $> 0$ , elles sont positives strictement.

La matrice  $A$  admet deux valeurs propres distinctes, strictement positives

**3--a)**

Notons  $I(p, q) = \int_0^1 t^p(\ln t)^q dt$  et développons  $\varphi(x, y)$  par linéarité des intégrales convergentes.

$$\varphi(x, y) = I(2, 2) - 2xI(3, 1) - 2yI(2, 1) + \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} + \frac{xy}{2}.$$

$\varphi$  est une fonction polynomiale, donc de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Calcul de  $I(p, q)$ . Soit  $a \in ]0, 1]$ . Intégrons  $\int_a^1 t^p(\ln t)^q dt$  par parties.

$u(t) = (\ln t)^q \implies u'(t) = \frac{q}{t}(\ln t)^{q-1}$  pour  $q \geq 1$  ;  $v'(t) = t^p \iff v(t) = \frac{1}{p+1}t^{p+1}$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont  $C^1$  sur  $]0, 1]$ , l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} \int_a^1 t^p(\ln t)^q dt &= \left[ \frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q \right]_a^1 - \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1} dt \\ &= -\frac{a^{p+1}}{p+1}(\ln a)^q - \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1} dt. \end{aligned}$$

$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^{p+1}}{p+1}(\ln a)^q = 0$  par croissances comparées, donc  $I(p, q) = -\frac{q}{p+1}I(p, q-1)$  pour  $q \geq 1$ . Divisons cette égalité par  $q!$ , on obtient :  $\frac{I(p, q)}{q!} = -\frac{1}{p+1} \frac{I(p, q-1)}{(q-1)!}$  pour