ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 7

1)

Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 dt$$

On note $\varphi(x, y)$ la valeur de cette intégrale.

2)

Montrer que les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ sont strictement positives.

3–a)

Montrer que la fonction φ précédemment définie est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un point critique (x_0, y_0) que l'on déterminera.

b) Montrer que $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \{\varphi(x, y)\} = \varphi(x_0, y_0)$.

4)

Montrer que l'ensemble E des fonctions continues sur $]0, 1]$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2 f^2(t)dt$ converge est un espace vectoriel réel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt$$

5)

Montrer que si X est un ensemble non vide et si h est une application de X dans $\mathbb{R}_+$, alors $\inf\limits_X (h^2(x)) = (\inf\limits_X (h(x)))^2$.

En déduire, à l'aide de la question 4), mais indépendamment des résultats de la question 3), comment retrouver que

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (\varphi(x, y)) = \varphi(x_0, y_0)$$

CORRIGE EXO D'ALGEBRE NUMERO 7

1)

$$\begin{aligned} t^2(\ln t - xt - y)^2 &= t^2((\ln t)^2 + x^2t^2 + y^2 - 2xt\ln t - 2y\ln t + 2xyt) \\ &= t^2(\ln t)^2 - 2xt^3\ln t - 2yt^2\ln t + t^4x^2 + t^2y^2 + 2xyt^3 \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} t^2(\ln t)^2 = \lim\limits_{t\to 0} t^3\ln t = \lim\limits_{t\to 0} t^2\ln t = 0$. La fonction $t \mapsto t^2(\ln t)^2 - 2xt^3\ln t - 2yt^2\ln t + t^4x^2 + t^2y^2 + 2xyt^3$ est prolongeable par continuité au point 0. Or, par les théorèmes généraux, cette fonction est continue sur $]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 dt$ est faussement impropre, donc convergente.

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \varphi(x,y) = \int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2 dt \text{ existe}}$$

2)

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de A si et seulement si le déterminant Δ de $A - \lambda I$ est nul.

$$\begin{aligned} \Delta &= (\tfrac{2}{5} - \lambda)(\tfrac{2}{3} - \lambda) - \tfrac{1}{4} = \lambda^2 - (\tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3})\lambda + \tfrac{4}{15} - \tfrac{1}{4} \\ &= \lambda^2 - \tfrac{16}{15}\lambda + \tfrac{1}{60}. \end{aligned}$$

Le discriminant vaut $(\frac{16}{15})^2 - 4\frac{1}{60} = \frac{256}{225} - \frac{1}{15} > 0$ de manière évidente. Le déterminant admet deux racines distinctes. Leur produit $\frac{1}{60}$ est > 0, elles sont de même signe ; leur somme $\frac{16}{15}$ est > 0, elles sont positives strictement.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ admet deux valeurs propres distinctes, strictement positives}}$$

3-–a)

Notons $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(\ln t)^q dt$ et développons $\varphi(x,y)$ par linéarité des intégrales convergentes.

$\varphi(x,y) = I(2,2) - 2xI(3,1) - 2yI(2,1) + \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} + \frac{xy}{2}$.

φ est une fonction polynomiale, donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

- Calcul de $I(p,q)$. Soit $a \in]0,1]$. Intégrons $\displaystyle\int_a^1 t^p(\ln t)^q dt$ par parties.

$u(t) = (\ln t)^q \Longrightarrow u'(t) = \frac{q}{t}(\ln t)^{q-1}$ pour $q \geq 1$; $v'(t) = t^p \Longleftarrow v(t) = \frac{1}{p+1}t^{p+1}$. Les fonctions u et v sont C^1 sur $]0,1]$, l'intégration par parties est légitime.

$$\begin{aligned} \int_a^1 t^p(\ln t)^q dt &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q\right]_a^1 - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1}dt \\ &= -\frac{a^{p+1}}{p+1}(\ln a)^q - \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^p(\ln t)^{q-1}dt. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{a\to 0}\frac{a^{p+1}}{p+1}(\ln a)^q = 0$ par croissances comparées, donc $I(p,q) = -\frac{q}{p+1}I(p,q-1)$ pour $q \geq 1$. Divisons cette égalité par $q!$, on obtient : $\dfrac{I(p,q)}{q!} = -\dfrac{1}{p+1}\dfrac{I(p,q-1)}{(q-1)!}$ pour