ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 6

Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

$$\forall (f,g) \in E^2, \text{ on pose } [f,g] = fg - gf \text{ où } fg = f \circ g.$$

On dira qu'un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe un entier naturel n tel que $f^n = 0$.

1–a)

Montrer que $\forall (f,g,h) \in E^3,\ [[f,g],h] + [[g,h],f] + [[h,f],g] = 0$.

b) Soit $(f,g) \in E^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $[f,g] = [g,f]$.

2)

Soit $f \in E$. On souhaite montrer, dans cette question, l'équivalence des propositions :

i) Il existe un projecteur p de E tel que $f = [p,f]$.

ii) $f^2 = 0$.

a) On suppose i). Montrer successivement que $pfp = 0$ puis $fp = 0$ et conclure.

b) On suppose ii). En considérant un projecteur d'image $\mathrm{Im}\, f$, conclure.

3)

Soit g fixé dans $\mathcal{L}(E)$.

a) Démontrer que l'application $\varphi_g\ :\ \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E),\ f \mapsto [f,g]$ est linéaire.

b) Démonter que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{L}(E),\ (\varphi_g)^n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^k f g^{n-k}.$$

c) En déduire que si g est nilpotent, alors φ_g est nilpotent.

4)

Résoudre l'équation $[f,g] = \mathrm{Id}_E$, d'inconnues f et g appartenant à $\mathcal{L}(E)$.