



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 6

Dans cet exercice, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

$$\forall (f, g) \in E^2, \text{ on pose } [f, g] = fg - gf \text{ où } fg = f \circ g.$$

On dira qu'un endomorphisme f de E est nilpotent s'il existe un entier naturel n tel que $f^n = 0$.

1-a) _____

Montrer que $\forall (f, g, h) \in E^3, [[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$.

b) Soit $(f, g) \in E^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $[f, g] = [g, f]$.

2) _____

Soit $f \in E$. On souhaite montrer, dans cette question, l'équivalence des propositions :

i) Il existe un projecteur p de E tel que $f = [p, f]$.

ii) $f^2 = 0$.

a) On suppose i). Montrer successivement que $pfp = 0$ puis $fp = 0$ et conclure.

b) On suppose ii). En considérant un projecteur d'image $\text{Im } f$, conclure.

3) _____

Soit g fixé dans $\mathcal{L}(E)$.

a) Démontrer que l'application $\varphi_g : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E), f \mapsto [f, g]$ est linéaire.

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{L}(E), (\varphi_g)^n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^k f g^{n-k}.$$

c) En déduire que si g est nilpotent, alors φ_g est nilpotent.

4) _____

Résoudre l'équation $[f, g] = \text{Id}_E$, d'inconnues f et g appartenant à $\mathcal{L}(E)$.