



## ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

## ALGEBRE ENONCE NUMERO 5

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $f$  l'application  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M - 2 \operatorname{tr}(M)A$$

où  $\operatorname{tr}(M)$  la trace de  $M$ .

1) \_\_\_\_\_

L'application  $f$  est-elle linéaire ? Montrer que  $f(A) = (0)$  si et seulement si  $\operatorname{tr}(A) = \frac{1}{2}$  ou  $A = (0)$ .

2-a) \_\_\_\_\_

Montrer que  $\operatorname{tr}(A) \neq \frac{1}{2} \implies \operatorname{Ker} f = \{(0)\}$ .

2-b) \_\_\_\_\_

Montrer que  $f$  bijective si et seulement si  $\operatorname{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$ .

3) \_\_\_\_\_

Dans cette question on suppose  $\operatorname{tr}(A) = \frac{1}{2}$ .

On note  $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$ .

a) Montrer que  $H$  et  $\operatorname{vect}(A)$  sont supplémentaires dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

b) Montrer que  $f$  est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

4) \_\_\_\_\_

Montrer que  $f \circ f = \operatorname{Id}$  si et seulement si  $\operatorname{tr}(A) = 1$  ou  $A = (0)$ . Quels sont alors les sous-espaces propres de  $f$  ?

5) \_\_\_\_\_

Dans cette question on ne fait aucune hypothèse sur  $\operatorname{tr}(A)$ .

a) Déterminer un polynôme annulateur de  $f$ .

b) Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\operatorname{tr}(A) = 0$  ou  $A = (0)$ .