



ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = M - 2 \operatorname{tr}(M)A$$

où $\operatorname{tr}(M)$ la trace de M .

1) _____

L'application f est-elle linéaire ? Montrer que $f(A) = (0)$ si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = \frac{1}{2}$ ou $A = (0)$.

2-a) _____

Montrer que $\operatorname{tr}(A) \neq \frac{1}{2} \implies \operatorname{Ker} f = \{(0)\}$.

2-b) _____

Montrer que f bijective si et seulement si $\operatorname{tr}(A) \neq \frac{1}{2}$.

3) _____

Dans cette question on suppose $\operatorname{tr}(A) = \frac{1}{2}$.

On note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$.

a) Montrer que H et $\operatorname{vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

4) _____

Montrer que $f \circ f = \operatorname{Id}$ si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = 1$ ou $A = (0)$. Quels sont alors les sous-espaces propres de f ?

5) _____

Dans cette question on ne fait aucune hypothèse sur $\operatorname{tr}(A)$.

a) Déterminer un polynôme annulateur de f .

b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = 0$ ou $A = (0)$.