ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application $f\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ f(M) = M - 2\,\mathrm{tr}\,(M)A$$

où $\mathrm{tr}\,(M)$ la trace de M.

1)

L'application f est-elle linéaire ? Montrer que $f(A) = (0)$ si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) = \frac{1}{2}$ ou $A = (0)$.

2-a)

Montrer que $\mathrm{tr}\,(A) \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{(0)\}$.

2-b)

Montrer que f bijective si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) \neq \frac{1}{2}$.

3)

Dans cette question on suppose $\mathrm{tr}\,(A) = \frac{1}{2}$.

On note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \mathrm{tr}\,(M) = 0\}$.

a) Montrer que H et $\mathrm{vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

4)

Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$ si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) = 1$ ou $A = (0)$. Quels sont alors les sous-espaces propres de f ?

5)

Dans cette question on ne fait aucune hypothèse sur $\mathrm{tr}\,(A)$.

a) Déterminer un polynôme annulateur de f.

b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ ou $A = (0)$.