ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'application $f\ :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = M - 2\,\mathrm{tr}\,(M)A$$

où $\mathrm{tr}\,(M)$ la trace de M.

1)

L'application f est-elle linéaire ? Montrer que $f(A) = (0)$ si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) = \frac{1}{2}$ ou $A = (0)$.

2-a)

Montrer que $\mathrm{tr}\,(A) \neq \frac{1}{2} \Longrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \{(0)\}$.

2-b)

Montrer que f bijective si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) \neq \frac{1}{2}$.

3)

Dans cette question on suppose $\mathrm{tr}\,(A) = \frac{1}{2}$.

On note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ \mathrm{tr}\,(M) = 0\}$.

a) Montrer que H et $\mathrm{vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que f est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

4)

Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$ si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) = 1$ ou $A = (0)$. Quels sont alors les sous-espaces propres de f ?

5)

Dans cette question on ne fait aucune hypothèse sur $\mathrm{tr}\,(A)$.

a) Déterminer un polynôme annulateur de f.

b) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ ou $A = (0)$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.