ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 3

Dans tout cet exercice, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathbb{Z}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1)

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\varphi_n(P)$ le quotient dans la division euclidienne de $P(-1) - P(X)$ par $X + 1$.

a) Démontrer que φ_n ainsi définie est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer son noyau.

c) L'application φ_n est-elle une surjection de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2)

Ecrire la matrice de φ_n dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3)

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Démontrer que $\varphi_n(P)$ s'écrit $\sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j$ avec, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$:

$$b_j = (-1)^j \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^k a_k$$

Dans la suite de cet exercice, on considère la suite de polynômes $(T_n(X))_{n\geq 0}$ ***définie par*** $T_0(X) = 1,\ T_1(X) = 1 - 2X$ ***puis, pour tout*** $n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) = 2(1-2X)T_{n+1}(X) - T_n(X)$

4)

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $v_n = T_n(-1)$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver l'expression de v_n en fonction de n.

b) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, v_n est un entier strictement positif.

5)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n et montrer que $T_n \in \mathbb{Z}[X]$. Déterminer son coefficient dominant.

6)

Démontrer que $\varphi_n(T_n) \in \mathbb{Z}[X]$.

