ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$\forall (i,j) \in ([\![1,n]\!])^2,\ a_{i,j} > 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1)

Montrer que 1 est valeur propre de A.

2)

Montrer que les valeurs propres réelles ou complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

3–a)

Soit z un complexe non nul vérifiant $|1+z| = 1 + |z|$. Montrer que z est un réel strictement positif.

b) Montrer que si z_1 et z_2 sont deux complexes non nuls vérifiant $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, alors z_1 et z_2 ont le même argument.

c) Soit $z_1, z_2, \ldots z_n$ des complexes non nuls tels que

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

Montrer que ces complexes ont le même argument.

4)

On considère une valeur propre λ de A de module 1 et X une colonne propre associée.

a) Montrer que tous les coefficients de X sont non nuls.

b) Montrer que tous les coefficients de X ont le même argument.

c) Montrer que tous les coefficients de X ont le même module.

d) En déduire que 1 est la seule valeur propre de module 1.

5)

Ce dernier résultat est-il encore valable si l'on suppose

$$\forall (i,j) \in ([\![1,n]\!])^2,\ a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\ ?$$