ORAL DE MATHEMATIQUES

HEC ESCP

ALGEBRE ENONCE NUMERO 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n \rrbracket)^2,\ a_{i,j} > 0 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1)

Montrer que 1 est valeur propre de A.

2)

Montrer que les valeurs propres réelles ou complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

3–a)

Soit z un complexe non nul vérifiant $|1+z| = 1+|z|$. Montrer que z est un réel strictement positif.

b) Montrer que si z_1 et z_2 sont deux complexes non nuls vérifiant $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$, alors z_1 et z_2 ont le même argument.

c) Soit $z_1, z_2, \dots z_n$ des complexes non nuls tels que

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

Montrer que ces complexes ont le même argument.

4)

On considère une valeur propre λ de A de module 1 et X une colonne propre associée.

a) Montrer que tous les coefficients de X sont non nuls.

b) Montrer que tous les coefficients de X ont le même argument.

c) Montrer que tous les coefficients de X ont le même module.

d) En déduire que 1 est la seule valeur propre de module 1.

5)

Ce dernier résultat est-il encore valable si l'on suppose

$$\forall (i,j) \in (\llbracket 1,n \rrbracket)^2,\ a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \llbracket 1,n \rrbracket,\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\ ?$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.