



ORAL DE MATHÉMATIQUES

HEC ESCP

ALGÈBRE ÉNONCÉ NUMÉRO 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in ([1,n])^2, a_{i,j} > 0 \text{ et } \forall i \in [1,n], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1) _____

Montrer que 1 est valeur propre de A .

2) _____

Montrer que les valeurs propres réelles ou complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

3-a) _____

Soit z un complexe non nul vérifiant $|1+z| = 1+|z|$. Montrer que z est un réel strictement positif.

b) Montrer que si z_1 et z_2 sont deux complexes non nuls vérifiant $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$, alors z_1 et z_2 ont le même argument.

c) Soit z_1, z_2, \dots, z_n des complexes non nuls tels que

$$|z_1+z_2+\dots+z_n| = |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n|.$$

Montrer que ces complexes ont le même argument.

4) _____

On considère une valeur propre λ de A de module 1 et X une colonne propre associée.

a) Montrer que tous les coefficients de X sont non nuls.

b) Montrer que tous les coefficients de X ont le même argument.

c) Montrer que tous les coefficients de X ont le même module.

d) En déduire que 1 est la seule valeur propre de module 1.

5) _____

Ce dernier résultat est-il encore valable si l'on suppose

$$\forall (i,j) \in ([1,n])^2, a_{i,j} \geq 0 \text{ et } \forall i \in [1,n], \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 ?$$